

Modellbildung, Simulation und Regelung dynamischer Systeme

Dieter Kraft
Fachhochschule München
Fachbereich Maschinenbau und Fahrzeugtechnik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iv
1 Modellierung dynamischer Systeme	1
1.1 Einführendes Beispiel: Balancieren eines Stabes	1
1.1.1 Modellgleichung	1
1.1.2 Übertragungsfunktion des Modells	2
1.1.3 Stabilität des Stabes	3
1.1.4 Stabilisierung des Stabes durch Regelung	4
1.1.4.1 Proportional-Regler	4
1.1.4.2 Proportional-Differential-Regler	4
1.1.5 Simulation des Stabes	5
1.1.5.1 Analogsimulation	6
1.1.5.2 Digitalsimulation	6
1.1.5.3 Rechte Seiten des Stabes	7
1.2 Zustandsdarstellung dynamischer Systeme	7
1.2.1 Zustandsgleichungen	7
1.2.2 Zustandsnormalformen	8
1.2.2.1 Regler-Normalform	9
1.2.2.2 Beobachter-Normalform	11
1.2.3 Normalformen und Übertragungsfunktion	13
1.2.4 Ähnlichkeitstransformationen	13
2 Simulation dynamischer Systeme	14
2.1 Lösung im Frequenzbereich	14
2.1.1 Übertragungsfunktion der Zustandsgleichung	15
2.2 Lösung im Zeitbereich	15
2.2.1 Homogene Lösung	15
2.2.2 Partikuläre Lösung	16
2.2.3 Gesamtlösung	17
2.3 Numerische Lösung	18
2.3.1 Diskretisierung	18

2.3.1.1	Lösungsalgorithmus	18
2.3.1.2	Berechnung von Φ und Γ	18
2.3.2	Taylor-Entwicklung	20
2.3.2.1	Lösungsalgorithmus	20
2.3.2.1.1	Euler-Verfahren	21
2.3.2.1.2	Heun-Verfahren	22
2.3.2.1.3	Runge-Kutta-Verfahren	22
2.3.2.2	Computer-Prozedur	22
2.4	Beispiel: Balancierter Stab	23
2.4.1	Diskretisierung	24
2.4.2	Reihen-Entwicklung	25
3	Regelung dynamischer Systeme	26
3.1	Zustandsvektor-Rückführung	26
3.1.1	Das Regelgesetz	28
3.1.2	Die Reglermatrix	29
3.1.2.1	Polvorgabe	29
3.1.2.1.1	Beziehung von Bass und Gura	30
3.1.2.1.2	Formel von Ackermann	34
3.1.2.2	Linear-quadratischer Regler-Entwurf	34
3.1.2.2.1	Variations-Problem	35
3.1.2.2.2	Linear-quadratisches Variations-Problem	36
3.1.2.2.3	Stationäres Verhalten	36
3.1.3	Quadratische Gütefunktion	39
3.1.3.1	Lyapunov-Gleichung	39
3.1.3.2	Gütefunktion für Polvorgabe	40
3.2	Führungsverhalten	41
3.2.1	Vorfilter	42
3.2.2	Vorsteuerung	43
3.3	Integrale Regelung	45
3.3.1	Reglerstruktur	45
3.3.2	Reglerparameter	45

4 Zustandsschätzung	47
4.1 Beobachter-Struktur	47
4.1.1 Blockschaltbilddarstellung	49
4.1.2 Beobachterpole	49
4.2 Schätzfehler	52
4.3 Separationsprinzip	52
4.3.1 Strecken- und Beobachtergleichung	53
4.3.2 Gesamtübertragungsfunktion	53
4.4 Beobachter-Entwurf	54
4.4.1 Reglerverstärkung	54
4.4.2 Beobacherverstärkung	54
4.4.3 Systemsimulation	54
4.5 Reduzierter Beobachter	55
4.5.1 Struktur	56
4.5.2 Eigenschaften	57
4.5.3 Implementierung	58
4.5.4 Regelung mit reduziertem Beobachter	58
4.6 Erweiterungen	60
Literaturverzeichnis	61
Anhänge	63
A Matrix-Algebra	63
B Linearisierung	68
Index	71

Vorwort¹

Das grundlegende Handwerkszeug der Regelungstechnik lernt der Student des Ingenieurwesens in der Vorlesung Regelungstechnik und den dazugehörigen Übungen und Praktika des vierten und fünften Semesters. Der Stoff beschränkt sich dort auf Analyse und Synthese geregelter dynamischer Systeme im Frequenzbereich. Die dabei verwendeten Methoden stammen größtenteils aus der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts. Sie wurden im Zusammenhang mit der Entwicklung elektrischer und elektronischer Systeme begründet und sind untrennbar mit den Namen Bode [7], Nyquist [36], Wiener [41] und Evans [13] verbunden.


Parallel zum Einsatz der Digitalrechner in Hochschulen und Industrie ab Mitte des Jahrhunderts und mit deren schnellem Vordringen bis zum einzelnen Arbeitsplatz im letzten Jahrzehnt wurden auch die modernen Methoden der Regelungstechnik, bei denen die Systeme im Zeitbereich beschrieben werden, zunehmend bekannt und deren Leistungsfähigkeit genutzt. Die Entwicklung dieser Verfahren wurde von Kalman [26] angestoßen. Ihre Beschreibung auf einfachem Niveau ist bei Franklin et al. [16], auf etwas höherem Niveau bei Chen [9], Freund [17, 18] und Kailath [25] zu finden.

Eine Auswahl aus dem Stoff dieser Methoden bildet einen Teil des Studienschwerpunktes Automatisierungstechnik. Diese Auswahl soll dem Studenten eine Einführung in die Beschreibung kontinuierlicher und diskontinuierlicher linearer Systeme ermöglichen. Damit eröffnet sich ihm auch der Zugang zur digitalen Regelung industrieller Prozesse.

Der Stoff gliedert sich dementsprechend in die Kapitel

- Modellierung und Beschreibung dynamischer Systeme,
- Lösung der Modellgleichungen mit dem Digitalrechner,
- Regelungskonzepte im Zustandsbereich,
 - Polvorgabe,
 - Linear-quadratische Optimalregelung,
 - Ausgangsvektor-Rückführung,
- Schätzung nicht-gemessener Zustandsgrößen,
- Entwurf von Zustandsbeobachtern.

Er wird durch Beispiele und Übungen erläutert und vertieft. Diese sollte sich der Student sorgfältig mit Bleistift und Papier aneignen. Auch die ausgeteilten Übungsblätter werden eindringlich der Bearbeitung empfohlen.

Der Satzstil² des Skriptums ist durch einen breiten linken Rand gekennzeichnet. In diesen Margin werden Hinweise, Verweise auf verwandte Abschnitte, kurze Bemerkungen, kleine Tabellen und Skizzen, Zwischenüberschriften etc. zur übersichtlichen Textstrukturierung gesetzt. Außerdem gibt er dem Studenten die Möglichkeit, eigene Bemerkungen, kleine Beispiele, Zwischenrechnungen usw. zu notieren. Besonders wichtige Ergebnisse sind eingerahmt oder mit  gekennzeichnet. Kleingedruckte Passagen können beim ersten Studium übergangen werden.³

¹ 5. korrigierter Nachdruck, WS 1997/98.

² Das Manuskript wurde in L^AT_EX mit dem Refman.Sty von H. Partl, TU Wien, gesetzt.

³ Aus produktionstechnischen Gründen fehlen in diesem PS-File einige Abbildungen. Ihre Existenz ist an einen speziellen Druckertreiber gebunden.

1 Modellierung dynamischer Systeme

Der Entwurf eines Regelungssystems wird an einem mathematischen Ersatzmodell des realen (meist physikalischen) Systems durchgeführt. Die Gründe hierfür liegen u.a.

- in der permanenten und kostengünstigen Verfügbarkeit des Modells,
- an dem großen Umfang und der hohen Qualität mathematischer Werkzeuge zum Reglerentwurf mit dem Digitalrechner.

Es ist im allgemeinen Aufgabe des Regelungsingenieurs, für ein geeignetes Modell zu sorgen. Für die Modellierung technisch-physikalischer Systeme benötigt er vertiefte Kenntnisse in den Grundlagenfächern Mechanik und Fluidmechanik, Elektrotechnik und Thermodynamik.

In aller Regel sind die Modelle ein vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit. Einmal sind nicht alle Effekte bekannt, zum anderen dominieren einige einflußreiche Eigenschaften andere minder bedeutende, deren Beitrag schon aus Wirtschaftlichkeitsgründen der Berechnung unterdrückt wird. Im folgenden werden Modellierungsbeispiele einfacher und mäßiger Komplexität aus Gründen der Anschauung und der Übung laufend eingestreut werden.

1.1 Einführendes Beispiel: Balancieren eines Stabes

Zur Einführung und zur Wiederholung einiger Begriffe aus der regelungstechnischen Grundvorlesung wird ein sehr einfaches mechanisches Modell erläutert, an dem aber schon alle wichtigen Begriffe und Prinzipien eingeübt werden können: das Balancieren eines Stabes auf der Fingerspitze.

1.1.1 Modellgleichung

Das Problem soll in der vertikalen ξ - η -Ebene nach Abbildung 1.1 betrachtet werden. Die Masse m des zu balancierenden Stabes mit der Länge l sei in der Stabspitze konzentriert, dem Schwerpunkt mit dem Koordinatenpaar (ξ, η) . Der Fußpunkt ξ_F des Stabes (Auflage auf der Fingerspitze) bewege sich nur horizontal, seine Lagekoordinate sei nicht vorgeschrieben. Die Auslenkung des Stabes aus der gewünschten Vertikalposition sei durch den Winkel ϕ angegeben. Dieser Winkel ist die Regelgröße, deren Sollgröße $\phi_S = 0$ ist.

Äußere Kräfte seien nur entlang der Stabachse aufgeprägt, es wirke keine vertikale Beschleunigung, d.h. im Gleichgewicht gilt $mg = f \cos \phi$. Der Winkel ϕ sei immer klein, da der Stab sich nicht weit aus seiner Sollrichtung bewegen soll, d.h. es kann $\sin \phi = \phi$ und $\cos \phi = 1$ angenommen werden.¹

¹ Mathematische Modelle realer Systeme sind im allgemeinen nichtlinear. In unserem Beispiel wird Linearität durch die Annahme kleiner Winkelabweichungen von der Sollage erreicht. Allgemeine Linearisierungsvorschriften werden in Anhang B beschrieben

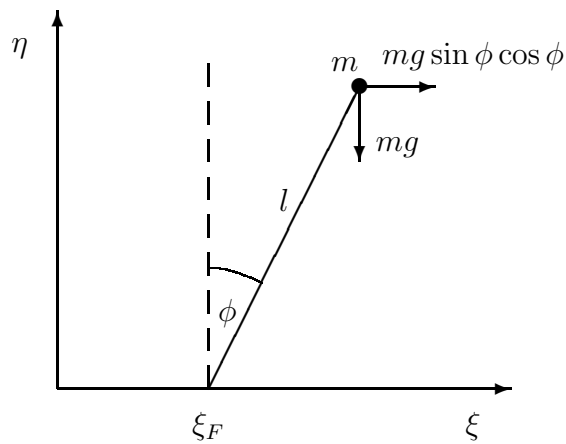


Abbildung 1.1: Balancierter Stab

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich das Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung formulieren:

$$mg\phi(t) = m\ddot{\xi}(t). \quad (1.1)$$

Zwischen Fußpunktcoordinate ξ_F als Einleitungspunkt der Beschleunigung und Schwerpunktkoordinate ξ besteht die Beziehung

$$\xi(t) = \xi_F(t) + l\phi(t),$$

und zweimal differenziert

$$\ddot{\xi}(t) = \ddot{\xi}_F(t) + l\ddot{\phi}(t).$$

Diese Relation in Gleichung (1.1) eingesetzt ergibt

$$\ddot{\phi}(t) - \frac{g}{l}\phi(t) = -\frac{1}{l}\ddot{\xi}_F(t), \quad (1.2)$$

mit den Anfangsbedingungen $\dot{\phi}(t_0) = \dot{\phi}_0$ und $\phi(t_0) = \phi_0$. Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der Regelgröße ϕ und der Eingangsgröße $\ddot{\xi}_F$. In Vorbereitung auf die Zustandsraumdarstellung der Differentialgleichung sei jetzt schon die Regelgröße als y , die Sollgröße als w und die normierte Eingangsgröße $\ddot{\xi}_F/l$ als u bezeichnet.

1.1.2 Übertragungsfunktion des Modells

Aus der Differentialgleichung im Zeitbereich

$$\ddot{y}(t) - \frac{g}{l}y(t) = -u(t), \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad (1.3)$$

→ Kompodium: Abschnitt 2.1.1 wird durch Laplace-Transformation die Übertragungsfunktion² $G_S(s)$ im Bereich der komplexen Frequenz s , kurz dem Frequenzbereich oder s -Bereich,

$$Y(s)s^2 - \frac{g}{l}Y(s) = -U(s),$$

² Der Index S bezeichnet die zu regelnde Strecke.

oder

$$G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-1}{s^2 - g/l}, \quad (1.4)$$

erhalten, deren Nenner

$$s^2 - g/l =: q(s) \quad (1.5)$$

als charakteristisches Polynom $q(s)$ der Strecke bezeichnet wird. Die charakteristische Gleichung dazu lautet

$$q(s) = 0. \quad (1.6)$$

⚠ Bei der Beschreibung des Systems durch die Übertragungsfunktion werden häufig alle Anfangsbedingungen Null gesetzt.

Das Eingangs-Ausgangsverhalten des Modells wird durch das Blockschaltbild in Abbildung 1.2 symbolisiert.

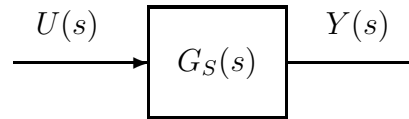


Abbildung 1.2: Blockschaltbild der Regelstrecke

1.1.3 Stabilität des Stabes

Die Lage des Stabes ist dann stabil in der Sollage, wenn eine Störung, die den Stab aus der Sollage lenkt, eine Kraft oder ein Moment bewirkt, die den Stab in die Sollage zurückbringt. In der Regelungstechnik haben sich zur Untersuchung der Stabilität verschiedene Begriffe gebildet, von denen wir uns auf den folgenden beschränken wollen.

Ein System ist genau dann BIBO-stabil,³ wenn alle Nullstellen der charakteristischen Gleichung⁴ in der offenen linken Halbebene⁵ der komplexen s -Ebene liegen. Der einfache Beweis dieses Satzes steht im Kompendium.

→ Kompendium: Satz 7

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (1.6) liegen bei

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{g/l},$$

also symmetrisch zur imaginären Achse, d.h. eine Nullstelle liegt in der rechten Halbebene, und somit ist das Übertragungssystem (1.4) nicht stabil.

³ Es behält einen beschränkten Ausgang (bounded output) für jeden beschränkten Eingang (bounded input).

⁴ Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind die Pole der Übertragungsfunktion.

⁵ Die offene linke Halbebene wird durch die linke Halbebene ohne die imaginäre Achse gebildet.

1.1.4 Stabilisierung des Stabes durch Regelung

In der Kindheit hat jedermann die Erfahrung gemacht, daß mit geringer Übung der Stab auf der Fingerspitze zu stabilisieren ist. Wie geschieht dies? Der Mensch wirkt als Regler! Er beobachtet die Spitze des Stab und bildet nach einem noch zu untersuchenden Regelgesetz aus deren Ort und Ortsänderung Beschleunigungsbefehle als Eingangsgröße über die Fingerspitze, die der Bewegung des Stabes aus der Vertikalen heraus entgegenwirken. Wir wollen die Struktur des Reglers im Regelkreis der Abbildung 1.3 untersuchen. Das Regelgesetz ist in der Reglerübertragungsfunktion $G_R(s)$ enthalten.

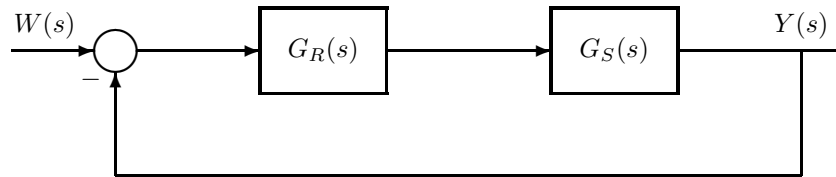


Abbildung 1.3: Geregelter Stab

→ Kompendium: Abschnitt 2.1.4 Die Übertragungsfunktion des Regelkreises lautet

$$G(s) = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)}. \quad (1.7)$$



Stabilisierung ist die vorrangigste Aufgabe eines Reglers.

1.1.4.1 Proportional-Regler

Zunächst sei der Proportionalregler (P-Regler) mit der Übertragungsfunktion

$$G_R = K_P$$

untersucht, für den $G(s)$ nach Gleichung (1.7)

$$G(s) = \frac{-K_P}{s^2 - (g/l + K_P)}$$

wird. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{g/l + K_P}$$

liegen immer noch nicht beide links von der imaginären Achse, d.h. mit dem alleinigen P-Regler läßt sich der Stab noch nicht stabilisieren.

1.1.4.2 Proportional-Differential-Regler

Nun sei der Proportional-Differential-Regler (PD-Regler) mit der Übertragungsfunktion

$$G_R = K_D s + K_P$$

untersucht, für den $G(s)$ nach Gleichung (1.7)

$$G(s) = \frac{-(K_D s + K_P)}{s^2 - K_D s - (g/l + K_P)} \quad (1.8)$$

wird. Die Lösungen $s_{1,2}$ der charakteristischen Gleichung

$$q(s) = s^2 - K_D s - (g/l + K_P) = 0$$

sind durch geeignete Wahl von K_D und K_P beide links von der imaginären Achse zu plazieren, d.h. mit dem PD-Regler läßt sich der Stab stabilisieren. Was sagt dieses Ergebnis über die Fähigkeit des Menschen als Regler aus?

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $q(s)$ können Sie sofort explizit bestimmen. Gleichungen höherer Ordnung können Sie numerisch mit dem Digitalrechner lösen und damit die Stabilität des Systems überprüfen. Mit Hilfe des Routh-Schemas können Sie aber schon allein unter Betrachtung der Koeffizienten des Polynoms über die Stabilität des Systems entscheiden.

→ Kompendium: Abschnitt
2.3.3

Im Beispiel des PD-geregelten Stabes ergibt sich folgende Anordnung im Routh-Schema:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & -g/l - K_P \\ s^1 & -K_D & \\ s^0 & -g/l - K_P & \end{array}$$



Notwendige und hinreichende Bedingung für Systemstabilität ist, daß die Vorzeichen der Koeffizienten in der ersten Spalte im Routh-Schema nicht wechseln und die Werte der Koeffizienten nicht Null werden.

Für unser Beispiel bedeutet dies

$$K_D < 0 \quad \text{und} \quad K_P < -g/l.$$

Übung 1 *Wie müssen Sie K_D und K_P wählen, damit beide Pole bei $s_{1,2} = -1$ liegen? Versuchen Sie für diesen Fall mit $g/l = 9$ die Sprungantwort zu berechnen und den Graphen der Übergangsfunktion zu skizzieren. Was können Sie über die stationäre Genauigkeit aussagen?*

Die Wahl der Regler-Koeffizienten nach Pol-Vorgabe wie in Übung 1 wird später als ein wichtiges Regler-Entwurfsverfahren eingehend behandelt.

Übung 2 *Mit dem PD-Regler erreichen Sie Stabilität aber keine stationäre Genauigkeit. Diese bewirkt erst der I-Anteil eines PID-Reglers.*

a) *Verifizieren Sie für diesen folgendes Ergebnis:*

$$G(s) = \frac{-(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{s^3 - K_D s^2 - (g/l + K_P)s - K_I}$$

b) *Bestimmen Sie die Stabilitätsbedingungen für die drei Regler-Koeffizienten.*

1.1.5 Simulation des Stabes

Ein wichtiges Werkzeug bei der Untersuchung dynamischer Systeme ist deren Simulation. Darunter versteht man die Berechnung (und graphische Darstellung) des Ausgangs des Systems, wenn dieses durch einen beliebigen Eingang angeregt wird. Die Simulation ist ein Hilfsmittel zur Beurteilung von Strecke und Regler im Zeitbereich. Man unterscheidet analoge, digitale und hybride (d.h. eine Verbindung von analoger und digitaler) Simulation. In

diesem Abschnitt werden die beiden Simulationsmodelle erläutert, Lösungsansätze benötigen noch weitergehende Voraussetzungen und werden etwas später vorgestellt.

Die Differentialgleichung (1.3) wird für die Simulation umgeformt

$$\ddot{y}(t) = \frac{g}{l}y(t) - u(t), \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.9)$$

1.1.5.1 Analogsimulation

Aus der Differentialgleichung wird ein Blockschaltbild für die analoge Simulation des Stabes mit als Integrierern geschalteten Operationsverstärkern und Potentiometern nach Abbildung 1.4 aufgebaut.

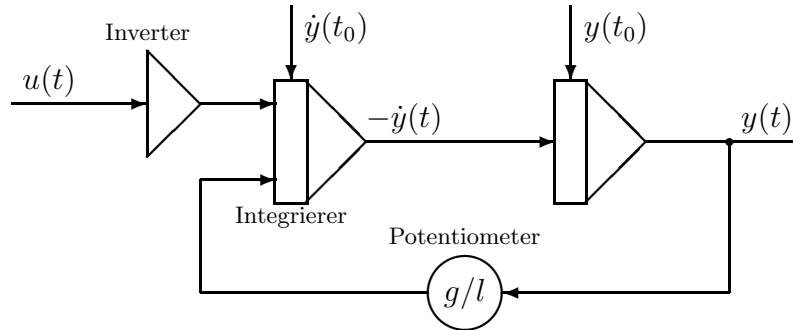


Abbildung 1.4: Analogsimulation des Stabes

Der linke Integrierer bekommt die invertierte Eingangsgröße $-u(t)$ zusammen mit der im Potentiometer mit dem Quotienten g/l multiplizierten Ausgangsgröße $y(t)$ als Eingang. Diese Summe wird ständig aufintegriert. Das Ergebnis $\dot{y}(t)$ wird nochmals zur Ausgangsgröße $y(t)$ integriert. Somit schließt sich der Kreis. Dies ist wohlgermerkt noch kein Regelkreis,⁶ sondern nur das Modell des Stabes allein, wie es im Frequenzbereich in Abbildung 1.2 dargestellt ist. An den Integrierern liegt an einem getrennten Eingang der jeweilige Anfangswert an. Integrierer kehren in der elektrischen Realisierung das Vorzeichen um.

1.1.5.2 Digitalsimulation

Die analoge Simulation hatte große Bedeutung von etwa 1940–1960. Heute ist sie fast vollständig von der digitalen Simulation abgelöst. Dafür existiert eine große Anzahl sorgfältig entworfener numerischer Algorithmen, die in hochqualitativer Software (meist in FORTRAN) implementiert sind [24].

Alle Softwarepakete verlangen die Formulierung der Modelle als Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.10)$$

oder in skalarer Darstellung

$$\dot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad x_1(t_0) = x_{1_0}, \quad (1.11a)$$

⁶ Es ist aber sicher nicht falsch, hier schon von Rückkopplung (Feedback) zu sprechen.

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad x_n(t_0) = x_{n_0}, \end{aligned} \quad (1.11b)$$

wobei \mathbf{x} ein Vektor mit n Komponenten und \mathbf{u} ein Vektor mit m Komponenten und \mathbf{f} der Vektor der rechten Seiten der Differentialgleichungen ebenfalls mit n Komponenten ist. Der Benutzer hat die rechten Seiten in einer Prozedur oder einem Unterprogramm zu formulieren.

1.1.5.3 Rechte Seiten des Stabes

Wie wird die Darstellung (1.9) in die Darstellung (1.11) umformuliert, d.h. wie wird eine Differentialgleichung höherer Ordnung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführt? Wir nehmen das Blockschaltbild 1.4 der Analogsimulation zu Hilfe und weisen von rechts beginnend (man kann auch von links beginnen!) jedem Integratorausgang eine Komponente des Variablenvektors \mathbf{x} zu:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}.$$

damit kann Gleichung (1.9) umgeformt werden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(t_0) &= x_{1_0}, \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g}{l}x_1(t) - u(t), & x_2(t_0) &= x_{2_0}, \end{aligned}$$

und

$$y(t) = x_1(t).$$

→ Anhang A

Diese Darstellung läßt sich sehr übersichtlich in Matrixschreibweise formulieren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), & \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix}, \\ y(t) &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

oder noch kompakter:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = (1 \quad 0).$$

Dies ist die Zustandsdarstellung des zu balancierenden Stabes.

1.2 Zustandsdarstellung dynamischer Systeme

1.2.1 Zustandsgleichungen

Die Darstellung dynamischer Systeme als System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.12a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (1.12b)$$

wird als Zustandsdarstellung bezeichnet. In Gleichung (1.12) sind

- \mathbf{x} der Zustandsvektor mit der Dimension n ,
- \mathbf{u} der Eingangsvektor mit der Dimension m ,
- \mathbf{y} der Ausgangsvektor mit der Dimension p ,
- \mathbf{A} die Systemmatrix mit der Dimension $n \times n$,
- \mathbf{B} die Eingangsmatrix mit der Dimension $n \times m$,
- \mathbf{C} die Ausgangsmatrix mit der Dimension $p \times n$,
- \mathbf{D} die Durchgangsmatrix mit der Dimension $p \times m$.

Die Matrix \mathbf{D} in Gleichung (1.12b) verbindet den Eingang \mathbf{u} direkt und trägheitslos mit dem Ausgang \mathbf{y} . Dies kommt in physikalischen Systemen nicht vor. Wir setzen deshalb immer $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

In Eingrößensystemen, das sind Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang, reduzieren sich die Eingangs- und Ausgangsmatrizen auf Vektoren, deshalb sind sie im vorangehenden Beispiel auch klein geschrieben. Systeme mit mehreren Eingängen und/oder Ausgängen, werden als Mehrgrößensysteme bezeichnet.

→ Anhang A

Wenn die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} von der Zeit abhängen, dann spricht man von zeitvarianten Systemen. Wir beschränken uns, wie allgemein üblich, auf zeitinvariante Systeme. Die Untersuchungsmethoden für diese Systeme mit konstanten Koeffizienten lehnen sich eng an die numerische lineare Algebra an [19, 12, 34]. Elemente der Rechnung mit Matrizen sind in Anhang A zusammengestellt.



Matrizen werden hier und im folgenden in Großbuchstaben und fett geschrieben, Vektoren in Kleinbuchstaben und ebenfalls fett. Im allgemeinen werden Vektoren als Spaltenvektoren angegeben, Zeilenvektoren sind transponierte Spaltenvektoren: \mathbf{a} ist ein Spaltenvektor, \mathbf{a}^T ist derselbe Vektor zum Zeilenvektor transponiert. Komponenten von Vektoren werden normal gedruckt und mit einem Index versehen, z.B. x_i , Elemente von Matrizen werden ebenfalls normal gedruckt und mit zwei Indizes gekennzeichnet, z.B. a_{ij} , mit i als Zeilenindex und j als Spaltenindex.

1.2.2 Zustandsnormalformen

Bestimmte Strukturen im Matrix-Tripel (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}) werden als Normalformen bezeichnet. Zwei dieser Normalformen wollen wir betrachten: die Regler-Normalform und die Beobachter-Normalform.

Gegeben sei die Modellgleichung in der Form

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ &= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \quad m < n, \end{aligned} \quad (1.13)$$

mit den entsprechenden Anfangswerten $y^{(n-1)}(t_0), \dots, \dot{y}(t_0), y(t_0)$. Die Übertragungsfunktion dieser Differentialgleichung lautet:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (1.14)$$

Um die Regler-Normalform der Gleichung (1.13) zu erhalten seien sämtliche Ableitungen der Eingangsfunktion $u(t)$ zunächst zu Null gesetzt, d.h.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t).$$

Für dieses System betrachten wir das Analogschaltbild entsprechend Abbildung 1.4 und weisen wie in Abschnitt 1.1.5.3 jedem Integrator-Ausgang eine Komponente x_i des Zustandsvektors entsprechend folgender Zuordnungsvorschrift zu:

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y}, \\ &\vdots \\ x_n &= \overset{(n-1)}{y}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u, \\ y &= x_1, \end{aligned}$$

oder in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (1.15a)$$

$$y = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.15b)$$

Für die allgemeine Form (1.13) ist der Berechnungsgang umständlicher, das Ergebnis aber formal nur geringfügig gegenüber (1.15) abgewandelt. Es wird der folgende Ansatz (1.16) betrachtet:

$$\overset{(n)}{\xi} + a_{n-1} \overset{(n-1)}{\xi} + \dots + a_1 \dot{\xi} + a_0 \xi = u \quad (1.16a)$$

$$b_{n-1} \overset{(n-1)}{\xi} + b_{n-2} \overset{(n-2)}{\xi} + \dots + b_1 \dot{\xi} + b_0 \xi = y \quad (1.16b)$$

Das Ergebnis (1.16b) wird durch Einsetzen von Gleichung (1.16a) und aller Ableitungen von (1.16a) in Gleichung (1.13) verifiziert.

Übung 3 Bitte vollziehen Sie die Einzelschritte der Verifikation mit Papier und Bleistift nach!

In Abbildung 1.5 ist Gleichung (1.16a) die Summe der Informationen am linken Summenpunkt und Gleichung (1.16b) die Summe der Informationen am rechten Summenpunkt (in Analogie zur Kirchhoffschen Knoten-Regel).

Unter Berücksichtigung der Beziehung (1.16b) ergibt sich die allgemeine Regler-Normalform:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (1.17a)$$

$$y = (b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n-1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.17b)$$

oder kompakt:⁷

$$\dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{A}_R \mathbf{x}_R + \mathbf{b}_R u, \quad y = \mathbf{c}_R^T \mathbf{x}_R.$$

Die Elimination der Differenzierglieder kann am Übergang von Abbildung 1.5 auf Abbildung 1.6 nachvollzogen werden. Gleichung (1.17) bleibt gegenüber Gleichung (1.15) unverändert, in Gleichung (1.17a) hat sich der Vektor \mathbf{c}_R gegenüber dem entsprechenden der Gleichung (1.15a) verändert. Die Matrix in Gleichung (1.17a) ist vom Frobenius-Typ und heißt Begleitmatrix.

Beispiel 1 Die in Abschnitt 1.1.5.3 entwickelte Zustandsdarstellung des balancierten Stabes

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \quad (1.18a)$$

$$y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (1.18b)$$

ist keine Reglernormalform.

⁷ Der Index R steht für Regler-Normalform

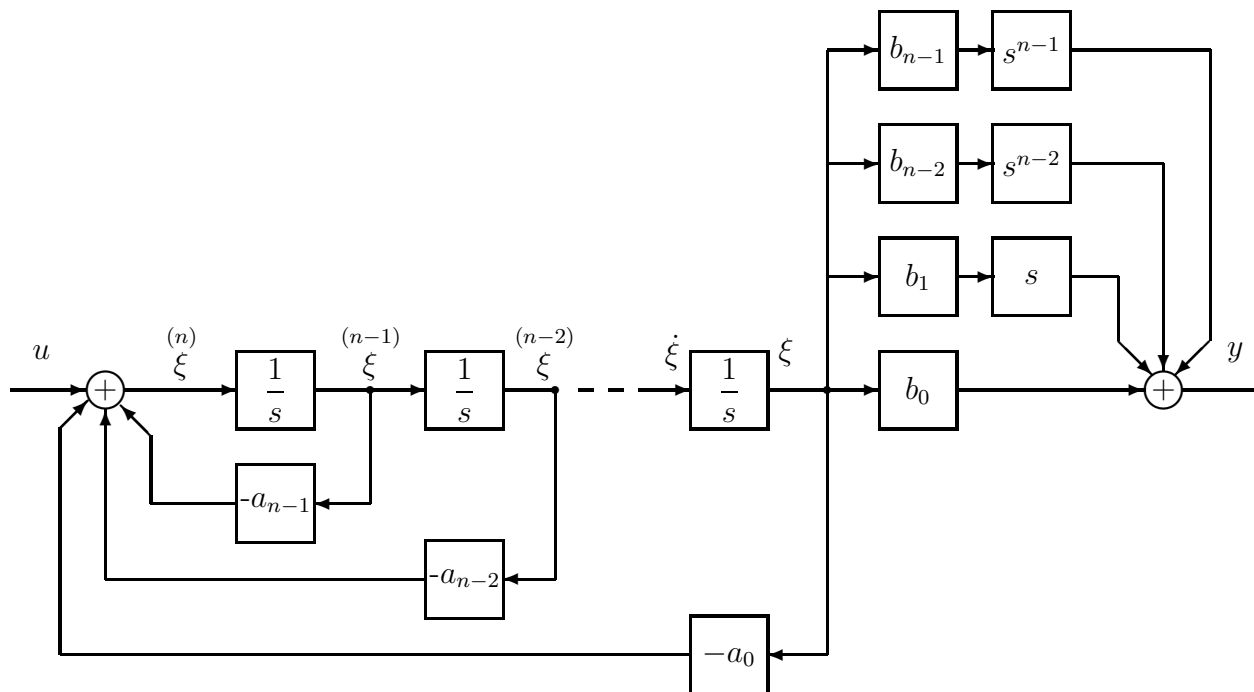


Abbildung 1.5: Blockschaltbild der Gleichung (1.16)

Übung 4 a) Begründen Sie die Behauptung in Beispiel 1.

b) Finden Sie eine Matrix \mathbf{T}_1 , die die Darstellung (1.18) in Reglernormalform transformiert. Orientieren Sie sich dazu am Abschnitt 1.2.4.

1.2.2.2 Beobachter-Normalform

Eine detaillierte Herleitung der im folgenden Blockschaltbild gezeigten Beobachter-Normalform⁸

$$\dot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{b}_B u, \quad y = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$$

oder explizit:

⁸ Der Index B steht für Beobachter-Normalform.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u \quad (1.19a)$$

$$y = (0 \ 0 \ \cdots \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.19b)$$

soll hier nicht verfolgt werden. Ihr Blockschaltbild zeigt Abbildung 1.7.

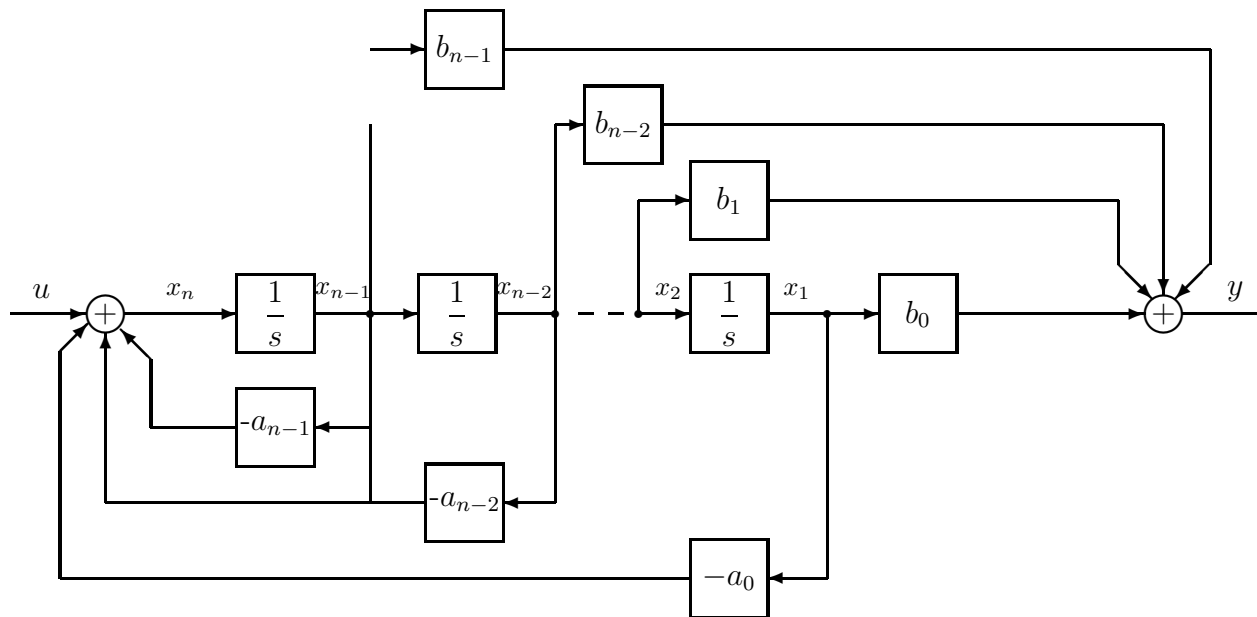


Abbildung 1.6: Blockschaltbild der Regler-Normalform

Die Beobachter-Normalform ist zur Regler-Normalform dual, d.h.

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_R^T, \quad \mathbf{b}_B = \mathbf{c}_R, \quad \mathbf{c}_B = \mathbf{b}_R.$$

Übung 5 In Übung 4 haben Sie den Stab in Reglernormalform transformiert. Finden Sie nun eine weitere Matrix \mathbf{T}_2 , die die Reglernormalform in die Beobachternormalform transformiert. Orientieren Sie sich dazu nochmals am Abschnitt 1.2.4.

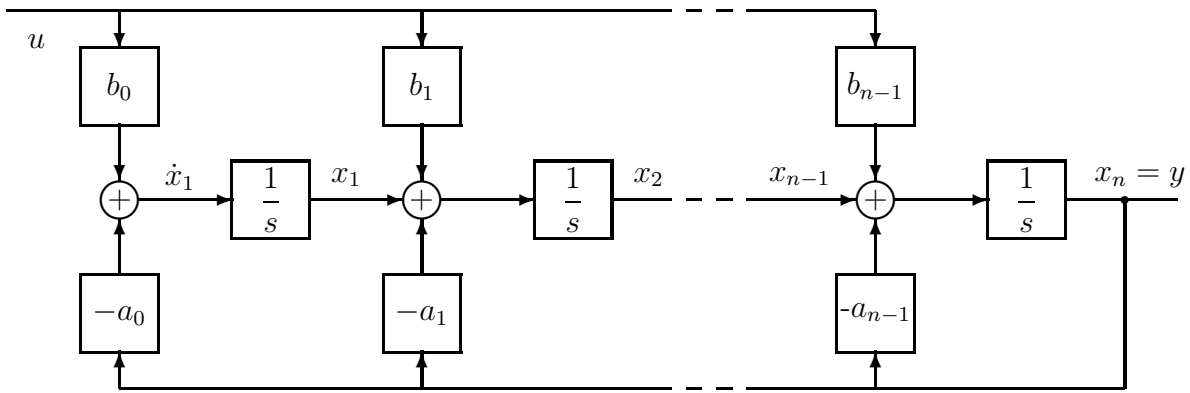


Abbildung 1.7: Blockschaltbild der Beobachter-Normalform

1.2.3 Normalformen und Übertragungsfunktion

Die Polynomkoeffizienten a_i und b_i der Übertragungsfunktion (1.14) erscheinen explizit in den Elementen der Matrizen $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ der beiden besprochenen Normalformen. Die letzte Zeile der Matrix \mathbf{A}_R der ReglerNormalform und die letzte Spalte dieser Matrix \mathbf{A}_B in der BeobachterNormalform enthalten die Koeffizienten a_i des Nenners der Übertragungsfunktion, während die Zählerkoeffizienten b_i im Ausgangsvektor \mathbf{c}_R der Regler-Normalform, bzw. im Eingangsvektor \mathbf{b}_B der Beobachter-Normalform stehen.

1.2.4 Ähnlichkeitstransformationen

Die Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

ist nicht eindeutig, wie es schon an der Existenz mehrerer Normalformen erkennbar ist. Vielmehr gibt es beliebig viele Darstellungen, die durch nichtsinguläre Transformationsmatrizen \mathbf{T} ineinander übergeführt werden können.

Es sei \mathbf{x} ein Zustandsvektor und \mathbf{T} eine nichtsinguläre (d.h. invertierbare) Matrix, dann ist

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

ebenfalls ein Zustandsvektor, und mit $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\xi}$ ergibt

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u},$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\xi}$$

wieder eine Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) &= \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), & \boldsymbol{\xi}(t_0) &= \boldsymbol{\xi}_0, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\boldsymbol{\xi}(t),\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{T}\mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}.$$

2 Simulation dynamischer Systeme

In wenigen Fällen gering komplexer Systeme niedriger Ordnung werden die Zustandsgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (2.1b)$$

analytisch und exakt gelöst werden. In aller Regel werden die Lösungen mit dem Computer numerisch und approximativ gefunden.

Wir werden auch den ersten Weg nicht vernachlässigen, da er Einsicht in die Lösungsstruktur vermittelt. Für den zweiten Weg werden wir auch Computer-Prozeduren angeben.

2.1 Lösung im Frequenzbereich

Es sei eine Zeile i der Gleichung (2.1a) und eine Zeile j der Gleichung (2.1b) herausgegriffen:

$$\dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \cdots + a_{in}x_n(t) + b_{i1}u_1(t) + \cdots + b_{im}u_m(t), \quad (2.2a)$$

$$x_i(t_0) = x_{i_0},$$

$$y_j(t) = c_{j1}x_1(t) + \cdots + c_{jn}x_n(t), \quad (2.2b)$$

mit a_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, b_{ik} , $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$ und c_{jk} , $j = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, n$ den entsprechenden Elementen der Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} . Die Laplace-Transformation der Gleichung (2.2) ergibt

$$sX_i(s) - x_{i_0} = a_{i1}X_1(s) + \cdots + a_{in}X_n(s) + b_{i1}U_1(s) + \cdots + b_{im}U_m(s),$$

und

$$Y_j(s) = c_{j1}X_1(s) + \cdots + c_{jn}X_n(s)$$

und für alle $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$, in Matrix-Form

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

oder umgeformt

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s). \quad (2.3b)$$

Gleichung (2.3) ist die Lösung der Zustandsgleichung im s -Bereich. Rücktransformation in den t -Bereich liefert $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$. Gleichung (2.3) beinhaltet zwei Summanden: der erste berücksichtigt den Lösungsanteil der Anfangsbedingung \mathbf{x}_0 , der zweite den des Systemeingangs \mathbf{u} .

Mit der Beziehung (A.2) kann die Inverse $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ in Gleichung (2.3a) als

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (2.4)$$

geschrieben werden. Die Determinante im Nenner ist das charakteristische Polynom (in s) der Übertragungsfunktion.

2.1.1 Übertragungsfunktion der Zustandsgleichung

Von der Darstellung (2.3) der Lösung der Zustandsgleichung gelangt man, wenn die Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gesetzt werden, sofort zur Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(s)$:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \quad (2.5)$$

Bei Mehrgrößensystemen ($m > 1$ oder $p > 1$) ist die Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(s)$ eine matrixwertige Funktion, d.h. $\mathbf{G}(s)$ ist eine $p \times m$ -Matrix mit rationalen Funktionen in s als Elementen $g_{ij}(s)$, die das Übertragungsverhalten vom Eingang U_j zum Ausgang Y_i bestimmen.

Beispiel 2 Das Matrix-Tripel $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ der Strecke des balancierten Stabes aus Abschnitt 1.1.5.3 ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = (1 \quad 0).$$

Es soll die Übertragungsfunktion des Stabes unter Verwendung der Beziehung (2.5) bestimmt werden.

Diese Beziehung wird folgendermaßen ausgewertet

$$\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} s & -1 \\ -g/l & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2 - g/l} & \frac{1}{s^2 - g/l} \\ \frac{g/l}{s^2 - g/l} & \frac{s}{s^2 - g/l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{s^2 - g/l},$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis (1.4).

Übung 6 Wiederholen Sie den Rechengang aus Beispiel 2 für folgende Daten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = (1 \quad 0).$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Vergleich mit den Matrix-Elementen der Normalform.

2.2 Lösung im Zeitbereich

Die Lösung der Zustandsgleichung (2.1a) im Zeitbereich erreichen wir in zwei Schritten: durch Berechnung der homogenen und der partikulären Lösung.

2.2.1 Homogene Lösung

Zunächst sei die Eingangsfunktion $\mathbf{u}(t)$ Null, d.h. wir suchen die Lösung $\mathbf{x}_h(t)$ des homogenen Systems

$$\dot{\mathbf{x}}_h(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_h(t), \quad \mathbf{x}_h(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.6)$$

Die Lösung sei genügend glatt, so daß sie als Reihenansatz geschrieben werden kann

$$\mathbf{x}_h(t) = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1(t - t_0) + \boldsymbol{\alpha}_2(t - t_0)^2 + \dots \quad (2.7)$$

Mit $t = t_0$ erhält man sofort $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\alpha}_0$. Differentiation von (2.7) und Substitution in (2.6) ergibt

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2(t - t_0) + 3\boldsymbol{\alpha}_3(t - t_0)^2 + \dots = \mathbf{A}\mathbf{x}_h(t),$$

und daraus $\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ für $t = t_0$. Dieser Vorgang wird fortgesetzt und führt zu

$$\mathbf{x}_h(t) = \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3(t - t_0)^3 + \dots \right] \mathbf{x}_0.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist die Reihendarstellung der Matrix-Exponentialfunktion

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{(t-t_0)^k}{k!}, \quad (2.8)$$

die unter gewissen Voraussetzungen sehr schnell konvergiert [19, 35], so daß nur eine geringe Anzahl k_{max} der Summanden in (2.8) berechnet werden muß. Damit errechnet sich die homogene Lösung zu

$$\mathbf{x}_h(t) = \left[\sum_{k=0}^{k_{max}} \mathbf{A}^k \frac{(t-t_0)^k}{k!} \right] \mathbf{x}_0. \quad (2.9)$$

Übung 7 Zeigen Sie, daß folgendes gilt:

$$e^{\mathbf{A}(t_2-t_0)} = e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)} e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)} \quad (2.10)$$

Hinweis: Lösen Sie die homogene Gleichung zuerst von t_0 nach t_1 und dann von t_1 nach t_2 .

2.2.2 Partikuläre Lösung

Eine partikuläre Lösung $\mathbf{x}_p(t)$ der Zustandsgleichungen wird durch Variation der Parameter erhalten. Folgender Lösungsansatz sei angenommen

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \boldsymbol{\xi}(t), \quad (2.11)$$

mit zu bestimmendem Parametervektor $\boldsymbol{\xi}(t)$. Dieser Ansatz muß die Gleichung (2.1a) erfüllen:

$$\mathbf{A}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \boldsymbol{\xi}(t) + e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

oder aufgelöst

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = e^{-\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

und integriert

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Dieser Ausdruck wird in den Ansatz (2.11) substituiert

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

und unter Verwendung von (2.10) erhalten wir eine partikuläre Lösung der Zustandsgleichung

$$\mathbf{x}_p(t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

2.2.3 Gesamtlösung

Die homogene Lösung (2.9) und eine Partikularlösung (2.12) ergeben die Gesamtlösung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (2.13b)$$

Wie schon die Lösung (2.3a) im Frequenzbereich zeigt auch die Lösung (2.13a) im Zeitbereich zwei Summanden: der erste beschreibt den Einfluß des Anfangswertes $\mathbf{x}(t_0)$ auf die Lösung (Anteil der Lösung der homogenen Differentialgleichung), der zweite den Einfluß einer Eingangsfunktion $\mathbf{u}(t)$.

Beachten Sie, daß $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ in (2.13a) eine Matrix ist mit elementweise Exponentialfunktionen. Diese Matrix wird als **Transitionsmatrix**

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \quad (2.14)$$

des dynamischen Systems (2.1a) bezeichnet, und mit ihr wird (2.13) zu

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.15b)$$

Diese Lösung gilt allgemein für lineare Differentialgleichungssysteme, die auch zeitabhängige Matrizen $\mathbf{A}(t)$ haben dürfen. Bei konstanten Matrizen \mathbf{A} reduziert sich die Abhängigkeit von $\Phi(t, t_0)$ von den beiden Variablen t und t_0 auf deren Differenz $t - t_0$: $\Phi(t - t_0)$ und für $t_0 = 0$, was man für zeitinvariante Systeme ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen darf, auf $\Phi(t)$. Damit ist die Lösung linearer, zeitinvarianter Systeme

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t) \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \int_0^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.16b)$$

Warum ist das Argument der Transitionsmatrix im Integranden von (2.16) $(t - \tau)$, während das Argument der Eingangsfunktion t ist? In Gleichung (2.3a) ist der zweite Summand ein Produkt aus zwei Faktoren, die von s abhängen: $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$. Dessen inverse Laplace-Transformation ist ein Faltungsintegral der Form $\int_0^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$.

→ Kompendium: Satz 6

Ein Vergleich der beiden Lösungen (2.3a) und (2.16a) zeigt folgenden Zusammenhang zwischen der Laplace-Transformierten der Transitionsmatrix $\Phi(\mathbf{t})$ und der Matrix $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$\mathcal{L}\{\Phi(\mathbf{t})\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}. \quad (2.17)$$

Übung 8 Rechnen Sie dieses Ergebnis für den skalaren Fall durch.

2.3 Numerische Lösung

Die numerische Lösung der Zustandsgleichung (2.16) auf dem Digitalrechner kann mit mehreren Ansätzen gewonnen werden. Wir betrachten einen Diskretisierungsansatz für speziell lineare Differentialgleichungen und einen Ansatz durch Entwicklung in eine Taylorreihe für allgemeine (auch nichtlineare) Differentialgleichungen.

2.3.1 Diskretisierung

Beim Diskretisierungsansatz soll die Lösung schrittweise über Teilintervalle mit der Intervalllänge T integriert werden.

2.3.1.1 Lösungsalgorithmus

Wir seien bei kT angelangt und gehen den Schritt nach $kT + T$:

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}(kT+T-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Während dieses Schrittes halten wir

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(kT), \quad kT \leq \tau < kT + T.$$

konstant (Halteglied nullter Ordnung). Dadurch kann $\mathbf{u}(\cdot)$ aus dem Integranden genommen werden. Änderung der Variablen $\eta = kT + T - \tau$ erleichtert die Integration:

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\eta} d\eta \mathbf{B} \mathbf{u}(kT). \quad (2.19)$$

Mit

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T}, \quad (2.20a)$$

$$\Gamma(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}\eta} d\eta \mathbf{B} \quad (2.20b)$$

wird Gleichung (2.19) und die zugehörige Gleichung der Ausgangsgröße

$$\mathbf{x}(kT + T) = \Phi(T) \mathbf{x}(kT) + \Gamma(T) \mathbf{u}(kT), \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \mathbf{x}(kT). \quad (2.21b)$$

2.3.1.2 Berechnung von Φ und Γ

Nach (2.8) ist

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 T^2 + \frac{1}{6} \mathbf{A}^3 T^3 + \dots$$

die Reihendarstellung der Matrix-Exponentialfunktion. Die Terme Φ und Γ können unter einheitlichen Gesichtspunkten berechnet werden, wenn

$$\Psi(T) = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2 T^2}{3!} + \dots$$

oder numerisch stabiler

$$\Psi(T) = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{2} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{3} \left(\dots \frac{\mathbf{A}T}{N-1} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{N} \right) \right) \dots \right)$$

definiert wird. Dann berechnet sich

$$\Phi(T) = \mathbf{I} + \mathbf{A}T\Psi(T) \quad (2.22)$$

und

$$\Gamma(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k T^{k+1}}{(k+1)!} \mathbf{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k T^k}{(k+1)!} T \mathbf{B} = \Psi(T) T \mathbf{B}. \quad (2.23)$$

Übung 9 Verifizieren Sie die unendliche Summe in (2.23) durch Integration von (2.20b).

Damit reduziert sich die numerische Berechnung der Zustandsgleichung auf die Ermittlung von $\Psi(T)$. Ein Computer-Programm 1 in der MATLAB-Syntax [33] zeigt, wie einfach das ist.

Algorithmus 1 Berechnung von Φ und Γ aus der Matrix-Exponential-Funktion:

```

1      function [Phi, Gamma] = c2d(a, b, t)
2      % Conversion of state space models
3      % from continuous to discrete time.
4      % [Phi, Gamma] = C2D(A,B,T)
5      % converts the continuous-time system:
6      %
7      %      x = Ax + Bu
8      %
9      % to the discrete-time state-space system:
10     %
11     %      x[n+1] = Phi * x[n] + Gamma * u[n]
12     %
13     % assuming a zero-order hold on the inputs
14     % and sample time T.
15
16     error(nargchk(3,3,nargin));
17     error(abcchk(a,b));
18
19     [m,n] = size(a);
20     [m,nb] = size(b);
21     s = expm([[a b]*t; zeros(nb,n+nb)]);
22     Phi = s(1:n,1:n);
23     Gamma = s(1:n,n+1:n+nb);
24
25
26     function e = expm(a)
27     % Matrix exponential via Taylor series.
28     % Scale A by power of 2 so that its norm is < 1/2 .
29     s = round(log(norm(a,1))/log(2)+1.5);
30     if s < 0,
31         s = 0;
32     end
33     a = a/2^s;
34
35     % Taylor series for exp(A)
36     [m,n] = size(a);

```



```

37     k = 1;
38     e = 0*a;
39     f = eye(m,n);
40     while norm(e+f-e,1) > 0,
41         e = e + f;
42         f = a*f/k;
43         k = k+1;
44     end
45
46     % Undo scaling by repeated squaring
47     for k = 1:s,
48         e = e*e;
49     end

```

2.3.2 Taylor-Entwicklung

Die Darstellung der Lösung einer allgemeinen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

durch Entwicklung in eine Taylor-Reihe beschränken wir der Übersicht halber auf den Fall einer skalaren Differentialgleichung in einer Variablen x , also $n = 1$. Die Beschreibung bleibt für Systeme von Differentialgleichungen, $n > 1$, gültig, und man findet sie in vielen Lehrbüchern zur numerischem Mathematik [10, 39].

2.3.2.1 Lösungsalgorithmus

Es sei angenommen, daß in

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.24)$$

die Funktion f genügend oft nach x , u und t differenzierbar ist. Wenn $\partial f / \partial x =: f_x$ und $\partial f / \partial u =: f_u$ stetig sind, dann besitzt die Differentialgleichung (2.24) eine eindeutige Lösung $x(t)$. Diese entwickeln wir in eine Taylor-Reihe um den Punkt $t = t_0$:

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)\dot{x}(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!}\ddot{x}(t_0) + \dots, \quad (2.25)$$

deren Ableitungen wir nicht explizit kennen, da die Lösung nicht bekannt ist. Wir beschaffen die Ableitungen durch totale Differentiation von (2.24)

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (2.26a)$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}f(x, u, t) = f_t + f_x\dot{x} + f_u\dot{u} = f_t + f_x f + f_u\dot{u}, \quad (2.26b)$$

⋮

Übung 10 Bilden Sie die dritte totale Ableitung der Differentialgleichung (2.24).

Diese Übung zeigt, daß die höheren totalen Ableitungen sehr komplexe Ausdrücke werden. Daraus werden alternativ folgende Konsequenzen gezogen:

1. die Taylor-Entwicklung wird nach wenigen Termen abgebrochen; dann ist (2.25) nur in einer kleinen Umgebung von t_0 gültig,
2. die totalen Ableitungen in der Taylor-Entwicklung werden durch zusätzliche Auswertung der Funktion f an geeigneten Zwischenwerten im Integrationsintervall gewonnen; dann muß ein höherer numerischer Aufwand eingesetzt werden, (2.25) ist aber in einer größeren Umgebung von t_0 gültig.

Es sei nun angenommen, daß die Entwicklung (2.25) eine brauchbare Näherung der Lösung für einen Schritt $h = t - t_0$ darstellt. Dann können x und alle seine totalen Ableitungen an der Stelle $t = t_0 + h$ ausgewertet werden, und mit ihnen kann ein neuer Schritt $t + h$ gemacht werden. Mit der Definition des Operators T

$$T_k(x, u, t) = f(x, u, t) + \frac{h}{2!} f'(x, u, t) + \dots + \frac{h^{k-1}}{k!} f^{(k-1)}(x, u, t), \quad (2.27)$$

wird dieser Vorgang als Algorithmus 2 formalisiert

Algorithmus 2 Taylor-Entwicklung der Ordnung k zur Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad x(t_0) = x_0,$$

1. wähle eine Schrittweite

$$h = \frac{t_f - t_0}{N},$$

2. setze

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, \dots, N,$$

3. berechne Approximationen x_i der Lösung $x(t_i)$ durch die Rekursion

$$x_{i+1} = x_i + hT_k(x_i, u(t_i), t_i), \quad i = 0, \dots, N - 1,$$

mit $T_k(x, u, t)$ nach (2.27).

Das Rest-Glied der Taylor-Entwicklung der Ordnung k

$$\begin{aligned} R &= \frac{h^{(k+1)}}{(k+1)!} f^{(k)}(x(\tau), u(\tau), \tau), \\ &= \frac{h^{(k+1)}}{(k+1)!} x^{(k+1)}(\tau), \quad t_i < \tau < t_i + h, \end{aligned}$$

zeigt, daß der Fehler der Approximation von der Ordnung $k + 1$, $\mathcal{O}(h^{k+1})$, ist.

2.3.2.1.1 Euler-Verfahren Für die Ordnung $k = 1$ wird Algorithmus 2 als Euler-Verfahren bezeichnet:

Algorithmus 3 Euler-Verfahren:

Schritt 1 und 2 wie in Algorithmus 2,

Schritt 3:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, u(t_i), t_i), \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

Das Restglied,

$$R = \frac{1}{2}h^2 \ddot{x}(\tau),$$

zeigt, daß der Fehler von $\mathcal{O}(h^2)$ ist.

2.3.2.1.2 Heun-Verfahren Für die Ordnung $k = 2$ wird Algorithmus 2 als Heun-Verfahren bezeichnet:

Algorithmus 4 Heun-Verfahren:

Schritt 1 und 2 wie in Algorithmus 2,

Schritt 3:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, u(t_i), t_i), \\ x_{i+1} &= x_i + 1/2[k_1 + hf(x_i + k_1, u(t_{i+1}), t_{i+1})], \quad i = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Übung 11 Bilden Sie das Restglied und daraus die Ordnung des Heun-Verfahrens.

2.3.2.1.3 Runge-Kutta-Verfahren Für Ordnungen $k > 1$ werden die Ableitungen durch zusätzliche Funktionsauswertungen an geeigneten Zwischenwerten im Intervall $t_i \leq t \leq t_i + h$ gewonnen. Auf die Ableitung wird hier verzichtet [10, Seite 362-366]. Das bekannteste Verfahren ist das von Runge und Kutta vierter Ordnung, das im folgenden Algorithmus beschrieben wird.

Algorithmus 5 Runge-Kutta-Verfahren:

Schritt 1 und 2 wie in Algorithmus 2,

Schritt 3:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, u(t_i), t_i), \\ k_2 &= hf(x_i + 1/2k_1, u(t_i + 1/2h), t_i + 1/2h), \\ k_3 &= hf(x_i + 1/2k_2, u(t_i + 1/2h), t_i + 1/2h), \\ k_4 &= hf(x_i + k_3, u(t_i + h), t_i + h), \\ x_{i+1} &= x_i + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Der Fehler ist hier von $\mathcal{O}(h^5)$.

2.3.2.2 Computer-Prozedur

Eine einfache Implementierung des Runge-Kutta-Verfahrens zeigt das folgende FORTRAN-Unterprogramm. Dieses rechnet mit fester Schrittweite h , effizientere Implementierungen mit Schrittweitensteuerungen finden Sie in Referenz [24, 28].

```

1      subroutine RuKu4 (f, n, x, t, h)
2      double precision x(*), t, h, hh
3      double precision dx [allocatable] (:)
4      double precision k1 [allocatable] (:)
5      double precision k2 [allocatable] (:)
6      double precision k3 [allocatable] (:)
7      double precision k4 [allocatable] (:)
8      integer          i, n
9      external         f
10
11     allocate (dx(n),k1(n),k2(n),k3(n),k4(n))
12     hh = h/2
13     call f(k1,x,t)
14     do i = 1,n
```

```

15     dx(i) = x(i)
16     x(i) = dx(i)+k1(i)*hh
17     end do
18     call f(k2,x,t+hh)
19     do i = 1,n
20     x(i) = dx(i)+k2(i)*hh
21     end do
22     call f(k3,x,t+hh)
23     t=t+h
24     do i = 1,n
25     x(i) = dx(i)+k3(i)*h
26     end do
27     call f(k4,x,t)
28     do i = 1,n
29     x(i) = dx(i)+(k1(i)+2*k2(i)+2*k3(i)+k4(i))*h/6
30     end do
31     deallocate (dx, k1, k2, k3, k4)
32     return
33     end

```

2.4 Beispiel: Balancierter Stab

Als Beispiel für die Anwendung der im Abschnitt 2.3 besprochenen numerischen Lösungsverfahren wollen wir den mit einem PD-Regler und einem Zustandsregler geregelten Stab simulieren. Aus Stabilitätsgründen wird nicht die unregelte Strecke mit der Übertragungsfunktion (1.4) berechnet, sondern die geregelte mit der Übertragungsfunktion (1.8)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-(K_D s + K_P)}{s^2 - K_D s - (g/l + K_P)}. \quad (2.28)$$

Die Regler-Normalform des PD-geregelten Stabes ist in Abbildung 2.1 gezeigt, und deren Koeffizienten sind

$$a_0 = -(g/l + K_P), \quad a_1 = -K_D,$$

und

$$b_0 = -K_P, \quad b_1 = -K_D.$$

Damit läßt sich die Regler-Normalform des geregelten balancierten Stabes formulieren:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l + K_P & K_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad (2.29a)$$

$$y(t) = (-K_P \quad -K_D) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2.29b)$$

Die Regler-Parameter K_D und K_P sollen wieder durch Polvorgabe bestimmt werden. Die beiden Pole des geregelten Systems sollen diesmal bei $s_{1,2} = -1 \pm i$ liegen. Daraus ergeben sich für $g/l = 9$ die Parameter

$$K_D = -2 \quad \text{und} \quad K_P = -11.$$

Übung 12 Bitte bestätigen Sie durch Vergleich der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Übertragungsfunktion (2.28) die numerischen Werte der Regler-Parameter.

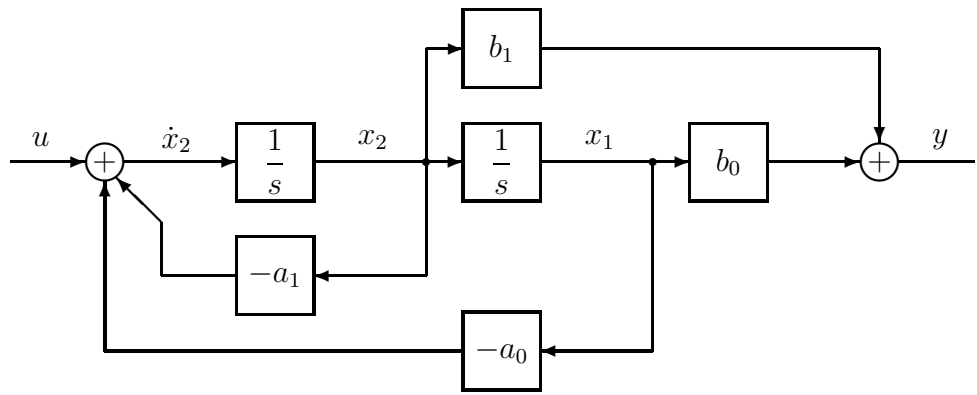


Abbildung 2.1: Regler-Normalform des balancierten Stabes

Die numerischen Lösungsverfahren gelten für beliebiges (beschränktes) Eingangssignal $u(t)$. Für einen Vergleich beschränken wir uns hier auf den Einheitssprung, d.h.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases},$$

dessen Laplace-Transformierte $U(s) = 1/s$ ist.

→ Kompendium: Abschnitt 2.2.2 Die exakte Lösung des Problems (2.28) ist dann

$$y(t) = \frac{-K_P}{-(K_P + g/l)} (1 - e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\beta\omega_n t + \theta)) + \frac{-K_D}{\sqrt{-(K_P + g/l)}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \beta\omega_n t, \quad (2.30)$$

mit $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$ und $\theta = \arccos \zeta$.

Übung 13 Bitte rechnen Sie als Wiederholung des Stoffs der Vorlesung Regelungstechnik diese Lösung nach. Überlegen Sie sich, daß deren zweiter Summand der differenzierende Anteil des Zählers der Übertragungsfunktion ist.

2.4.1 Diskretisierung

Die Lösung des Problems (2.29) mit dem Diskretisierungsansatz (2.21a) ist in Abbildung 2.2 in der linken Hälfte dargestellt. Dabei ist das Zeitintervall $t \in [0, 5]$ in $k = 128$, $k = 8$ und $k = 1$ Teilintervalle aufgeteilt. Die Graphen der entsprechenden Lösungen sind durch ausgezogene, gestrichelte, bzw. punktierte Linienzüge gekennzeichnet.

Für enge Diskretisierung ($k = 128$) fällt der Graph mit der exakten Lösung (2.30) zusammen. Die Lösungen der beiden anderen Diskretisierungen stimmen nur für $t = iT$, $i = 0, \dots, k$, mit T dem Diskretisierungsintervall, mit der exakten Lösung überein.

→ Rechenzeitvergleich in der Vorlesungsübung

Soll die Lösung nur für gewisse diskrete Zeitpunkte erhalten werden, dann ist für lineare Differentialgleichungen der Diskretisierungsansatz sehr ökonomisch bezüglich der aufzuwendenden Rechenleistung. Die Lösungen für Zwischenzeitpunkte können durch verschiedene Interpolationsansätze gewonnen werden: lineare Interpolation oder Spline-Interpolation.

Abbildung 2.2: Numerische Lösung der Zustandsgleichung

⚠ Zur Rekapitulation: Dieser Diskretisierungsansatz eignet sich nur für lineare bzw. linearisierte Differentialgleichungen, deren Parameter *nicht* von der unabhängigen Variablen t abhängen.

2.4.2 Reihen-Entwicklung

Die Lösung des Problems (2.29) mit Hilfe der Taylor-Entwicklung des Algorithmus 2 zur Ordnung $k = 1$ ist in Abbildung 2.2 in der rechten Hälfte dargestellt. Dabei sind die Schrittweiten $h = 0.05$, $h = 0.2$ und $h = 1$ Sekunden gewählt. Die Graphen der entsprechenden Lösungen sind wieder durch ausgezogene, gestrichelte, bzw. punktierte Linienzüge gekennzeichnet.

Im Gegensatz zum Diskretisierungsansatz, bei dem die Lösung im Diskretisierungspunkt iT , unabhängig von der Größe von T , gewonnen wird, ist die Lösung beim Reihenansatz entscheidend von der Schrittweite h abhängig. Für zu groß gewähltes h (um geringe Rechenzeit zu beanspruchen) wird der maximale Fehler im gewählten Beispiel für die Ordnung $k = 1$ (Euler-Verfahren) über 25% und damit das Ergebnis unbrauchbar. Für noch größere Schrittweiten wird das Verfahren sogar instabil. Über Stabilitätsprobleme beim Lösen von Differentialgleichungen wird auf die Spezialliteratur [22] verwiesen.

→ Rechenzeitvergleich
in der Vorlesungsübung

Wird die Ordnung auf $k = 4$ (Runge-Kutta-Verfahren) erhöht, dann erhöht sich auch der Rechenaufwand pro Schritt auf das Vierfache, aber der Fehler verringert sich auf 0.1%. Um einen bestimmten Fehler nicht zu überschreiten, kann man beim Runge-Kutta-Verfahren eine bedeutend größere Schrittweite wählen als beim Euler-Verfahren. Insgesamt ist solch ein Runge-Kutta-Verfahren mittlerer Ordnung (ergänzt um eine schnelle Schrittweiten-Steuerung) ein sehr effizientes Simulationswerkzeug.

⚠ Zur Rekapitulation: Der Taylor-Reihen-Ansatz eignet sich für beliebige, auch nichtlineare, Differentialgleichungen.

3 Regelung dynamischer Systeme

Die Regelung eines dynamischen Systems hat folgende Aufgaben zu erfüllen:

- die **Stabilität** des geschlossenen Kreises sicherzustellen,
- hohe **stationäre Genauigkeit** zu erzielen,
- gutes **Übergangsverhalten** zu erreichen,
- gute **Störunterdrückung** zu gewährleisten,
- die **Parameterempfindlichkeit** des Systems herabzusetzen.

Diese Anforderungen widersprechen sich zum Teil, und es ist Aufgabe des Regelungstechnikers, einen optimalen Kompromiß beim Reglerentwurf zu finden. Mit den Entwurfs-Methoden im Frequenzbereich wird dies im Kompendium [27] der Vorlesung Regelungstechnik versucht. Hier werden die entsprechenden Zeitbereichsverfahren behandelt.

Am weitaus häufigsten wird die Zustandsvektor-Rückführung eingesetzt. Die Elemente der Regler-Matrix \mathbf{K} werden durch Polvorgabe oder durch linear-quadratischen Optimal-Regler-Entwurf gewonnen. Zunehmende Bedeutung gewinnt auch die Ausgangsvektor-Rückführung. Nicht gemessene oder nicht meßbare Zustände müssen geschätzt werden. Dies geschieht durch Zustandsbeobachtung. Es werden volle, reduzierte und Kontroll-Beobachter gewählt.

3.1 Zustandsvektor-Rückführung

In Abschnitt 1 ist als einführendes Beispiel das Balancieren eines Stabes beschrieben und modelliert (Beispiel 1). Es wird gezeigt, daß eine instabile Strecke zweiter Ordnung allein durch proportionale Rückführung des Ausgangs y nicht stabilisiert werden kann. Erst die zusätzliche Rückführung der Ableitung \dot{y} des Ausgangs führt zum Ziel. Dieses Beispiel soll nun unter dem Gesichtspunkt der Zustandsvektor-Rückführung weitergeführt werden.

Beispiel 3 Die Zustandsdarstellung des unregelmäßigten Stabes in Gleichung (1.18) sei durch die Transformationsmatrix¹ $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{I}_2$ der Übung 4 in Regler-Normalform transformiert:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad (3.1a)$$

$$y(t) = (b_0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.1b)$$

¹ \mathbf{I}_2 ist die 2×2 Einheitsmatrix.

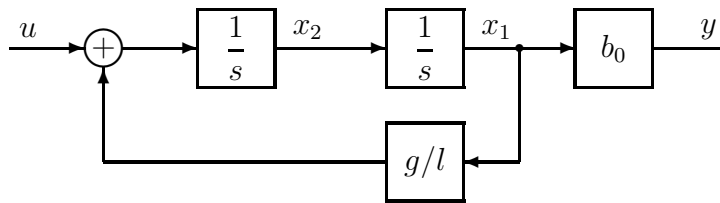


Abbildung 3.1: Blockschaltbild des unregulierten Stabes

mit $b_0 = -1$, deren Blockschaltbild in Abbildung 3.1 dargestellt ist. Die Zustandsvariable x_2 wird nicht zurückgeführt ($a_0 = 0$), deshalb ist das System nicht gedämpft.

Die Reglernormalform (2.29) des PD-geregelten Stabes aus Abschnitt 2.4 sei hier modifiziert wiederholt:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w(t), \quad (3.2a)$$

$$y(t) = (b_0 \ b_1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.2b)$$

mit $k_1 = -K_P$, $k_2 = -K_D$, $b_0 = -K_P$ und $b_1 = -K_D$. Deren Blockschaltbild zeigt Abbildung 3.2. Beachten Sie auch hier die Modifikation gegenüber Abbildung 2.1. Hier ist noch deutlich die offene Strecke aus Abbildung 3.1 zu erkennen, dazu die Regelung mit den Parametern k_1 und k_2 .

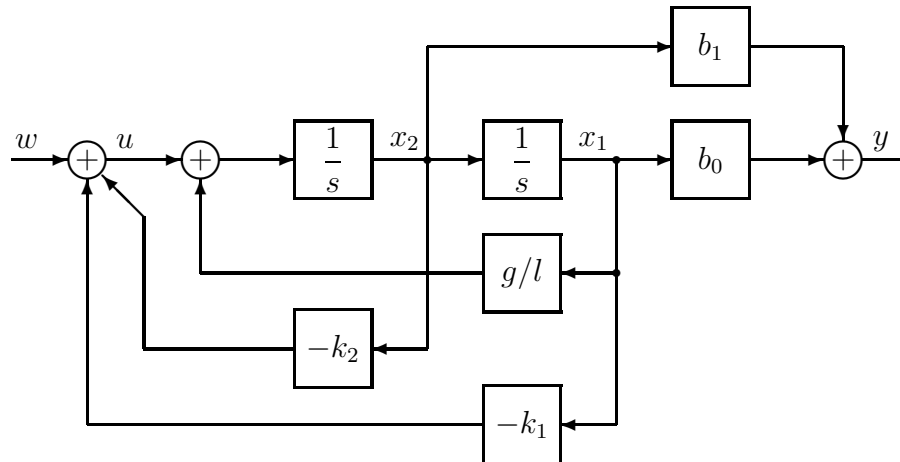


Abbildung 3.2: Blockschaltbild des geregelten Stabes

Worin besteht die Modifikation? Zunächst wird formal der Referenz-Eingang u in das geregelte System in w umbenannt. Der Eingang u ist nun, wie beim unregulierten System allein, der Eingang in die unregelte Strecke. Sodann

wird die Matrix

$$\mathbf{A}_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l + K_P & K_D \end{pmatrix}$$

des geregelten Systems als Summe der Matrix \mathbf{A} des unregulierten Systems und einer Matrix \mathbf{A}_{bk} dargestellt:

$$\mathbf{A}_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix \mathbf{A}_{bk} , hier im Eingrößenfall, das Produkt des Eingangsvektors \mathbf{b} der Strecke mit einem Verstärkungsvektor \mathbf{k} ist:

$$\mathbf{A}_{bk} = -\mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

3.1.1 Das Regelgesetz

Zustandsregler

Was ist die Motivation für diese Veränderung? Es wird das Steuergesetz $u(t)$ der unregulierten Strecke (im Beispiel 3 das Modell des zu balancierenden Stabes ohne den PD-Regler) umgewandelt in ein Regelgesetz $u(t)$

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t) + w(t), \quad (3.3)$$

mit $w(t)$ dem Referenz- oder Führungssignal und $-\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)$ dem Signal des rückgeführten Zustandes $\mathbf{x}(t)$. Das negative Vorzeichen dieses Signal ist vereinbart, weil Rückkopplung in aller Regel als Gegenkopplung geschaltet wird.

Das Regelgesetz (3.3), insbesondere dessen erster Summand, wird Zustandsregler genannt. Wie das Beispiel 3 zeigt, ist der ‘moderne’ Zustandsregler nichts anderes als der ‘klassische’ PD-Regler. Das allgemeine Blockschaltbild 1.3 muß zum Schaltbild 3.3 modifiziert werden, da wie in Abbildung 3.2 zu erkennen ist, der Zustandsregler im Rückführzweig liegt. Die dicker ausgezogenen Signalpfeile kennzeichnen Signalvektoren, die dünneren skalare Signale.

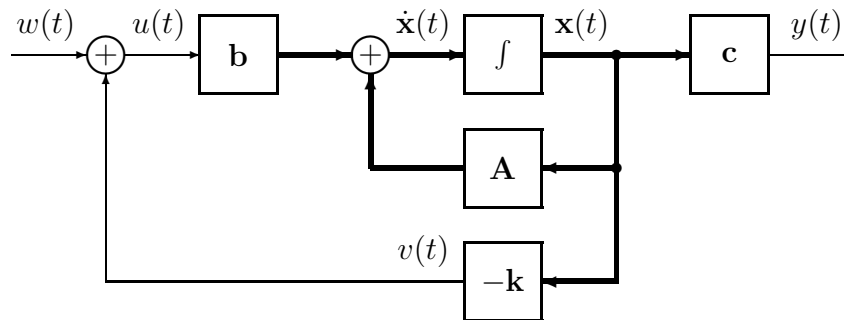


Abbildung 3.3: Strecke mit Zustandsregler

Wird das Regelgesetz (3.3), nun auf den Fall mehrerer möglicher Eingangsgrößen erweitert $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$, in die allgemeine Zustandsdarstellung (1.12) eingeführt, dann ergibt sich ($\mathbf{D}=\mathbf{0}$)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (3.4b)$$

Während in der klassischen Regelungstechnik die Untersuchung des Führungs- und Störverhalten eines Systems (Antwort des Systems auf Änderungen der entsprechenden Eingangsgrößen) im Vordergrund steht, wird in der modernen Regelungstechnik die Systemantwort auf Störungen der Zustandsgrößen (Änderung von \mathbf{x}_0) untersucht. Deshalb wird in aller Regel der Eingang $\mathbf{w}(t) = \mathbf{0}$ gesetzt. Damit erhält das Regelgesetz die Form

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t). \quad (3.5)$$

Die klassische und die moderne Problemstellung sind bei entsprechender Formulierung äquivalent.

Übung 14 Zeigen Sie, daß folgende Problemstellungen

a) Berechnung der Übergangsfunktion des gegebenen Stabes

$$G(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{-(K_D s + K_P)}{s^2 - K_D s - (g/l + K_P)}$$

und

b) Antwort des Systems auf eine Störung des Anfangszustandes $x_1(t_0) = 1$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l + K_P & K_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -K_P & -K_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

äquivalent sind in dem Sinne, daß bei a) der Ausgang $y(t)$ dem Eingang $w(t)$ folgt (stationär nicht genau, siehe dazu Übung 2) und daß bei b) der Ausgang $y(t)$ auf seinen ursprünglichen Wert $y(t) = 0$ geregelt wird.

3.1.2 Die Reglermatrix

Die Zustandsdarstellung dynamischer Systeme hat gegenüber der Frequenzbereichsdarstellung den Vorteil, daß alle Verfahren vom Eingrößenfall (eine Eingangsgröße, eine Ausgangsgröße) direkt auf den Mehrgrößenfall (mehrere Eingangsgrößen und/oder Ausgangsgrößen) übertragen werden können. Wenn im folgenden der Eingrößenfall behandelt wird, dann geschieht dies nur der einfacheren Herleitungsweise wegen.

Das Regelgesetz

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)$$

führt den Systemzustand $\mathbf{x}(t)$ bewertet mit dem Reglervektor \mathbf{k} auf den Systemeingang zurück. Da \mathbf{k} konstant ist, spricht man auch von konstanter Zustandsvektorrückführung. Für die Bestimmung der Verstärkung \mathbf{k} werden zwei Verfahren angewendet: die Vorgabe wünschenswerter Polstellen des gegebenen Systems (Polvorgabe) und die Minimierung eines quadratischen Integralkriteriums, das die Zustandsvariablen und die Eingangsvariablen beinhaltet, unter der Zustandsdifferentialgleichung als linearer Nebenbedingung (Linear-quadratischer Regler-Entwurf).

3.1.2.1 Polvorgabe

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0},$$

und die folgende Zustandsdarstellung $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t),$$

sei eine Realisierung der Übertragungsfunktion (z.B. in Regler-Normalform). Ihr charakteristisches Polynom

$$a(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$$

soll durch Zustandsvektorrückführung, implementiert im Regelgesetz

$$u(t) = w(t) - \mathbf{k}^T \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{k}^T = (k_1 \quad \dots \quad k_n),$$

in folgende Form modifiziert werden

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0.$$

Das Regelgesetz verändert die Zustandsdarstellung in

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}w(t), \quad y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t),$$

mit dem neuen charakteristischen Polynom

$$a_k(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T|. \quad (3.6)$$

Polvorgabe ist die Aufgabe, \mathbf{k} so zu bestimmen, daß

$$a_k(s) = \alpha(s)$$

wird. Die Lösung dieser Aufgabe wurde von verschiedenen Autoren unterschiedlich vorgeschlagen [25]. Der didaktisch geradlinigste Ansatz stammt von Bass und Gura. Er soll hier abgehandelt werden. Ackermanns Zugang und die Formel von Mayne und Murdoch werden nur als Ergebnis zitiert.

3.1.2.1.1 Beziehung von Bass und Gura Bass und Gura stützen ihre Ableitung auf folgende Identität von Determinanten:

$$|\mathbf{I}_m + \mathbf{p}\mathbf{q}| = |1 + \mathbf{q}\mathbf{p}|,$$

mit \mathbf{I}_m der $m \times m$ -Einheitsmatrix, \mathbf{p} einem Spaltenvektor der Dimension m und \mathbf{q} einem Zeilenvektor ebenfalls der Dimension m . Beachten Sie, daß $\mathbf{p}\mathbf{q}$ eine $m \times m$ -Matrix, während $\mathbf{q}\mathbf{p}$ ein Skalar ist.

Übung 15 Verifizieren Sie die Determinantenbeziehung anhand von zwei selbstgewählten Vektoren \mathbf{p} und \mathbf{q} der Dimension $m = 3$. Vergewissern Sie sich aber, daß dies kein Beweis der Beziehung ist.

Mit einem Ergebnis des ersten Übungsblattes zur Prozeßautomation:

$$|\mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

für quadratische \mathbf{A} und \mathbf{B} , wird jetzt folgende Gleichungskette gebildet:

$$\begin{aligned} a_k(s) &= |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T| \\ &= |(s\mathbf{I} - \mathbf{A})[\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\mathbf{k}^T]| \\ &= |s\mathbf{I} - \mathbf{A}||\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\mathbf{k}^T| \\ &= a(s)|1 + \mathbf{k}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}|. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$a_k(s) - a(s) = a(s)\mathbf{k}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{k}^T \text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b}, \quad (3.7)$$

wobei die Umformung des mittleren zum rechten Term auf die Beziehung (A.2) zurückgreift. Links und rechts stehen Polynome in s , und der Vektor \mathbf{k} kann durch Vergleich der Koeffizienten, die bei gleich hohen Potenzen von s stehen, gefunden werden.

Ein weiteres Ergebnis der Matrizen-Theorie ist nützlich: für die Adjungierte der Matrix $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ gilt

$$\text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I}s^{n-1} + (\mathbf{A} + a_{n-1}\mathbf{I})s^{n-2} + \dots + (\mathbf{A}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-2} + \dots + a_1\mathbf{I}).$$

Übung 16 Verifizieren Sie dieses Resultat durch Multiplikation beider Seiten mit $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Der Koeffizientenvergleich ergibt nun der Reihe nach von höchsten Potenzen beginnend:

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} - a_{n-1} &= \mathbf{k}^T\mathbf{b}, \\ \alpha_{n-2} - a_{n-2} &= \mathbf{k}^T\mathbf{A}\mathbf{b} + a_{n-1}\mathbf{k}^T\mathbf{b}, \\ \alpha_{n-3} - a_{n-3} &= \mathbf{k}^T\mathbf{A}^2\mathbf{b} + a_{n-1}\mathbf{k}^T\mathbf{A}\mathbf{b} + a_{n-2}\mathbf{k}^T\mathbf{b}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

oder kompakt

$$\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a} = \mathbf{k}^T\mathcal{C}\mathcal{T}, \quad (3.8)$$

mit den Zeilenvektoren

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_{n-1} \quad \alpha_{n-2} \quad \dots \quad \alpha_0), \\ \mathbf{a} &= (a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \dots \quad a_0), \end{aligned}$$

der Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{C} = (\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}), \quad (3.9)$$

und

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & a_4 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BASS & GURA Die Matrix \mathcal{T} ist eine Toeplitz-Matrix und immer invertierbar, deshalb kann die Gleichung (3.8) nach \mathbf{k} aufgelöst werden, wenn \mathcal{C} invertierbar ist:

$$\mathbf{k}^T = (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a})(\mathcal{C}\mathcal{T})^{-1} = (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a})\mathcal{T}^{-1}\mathcal{C}^{-1}. \quad (3.10)$$

Dies ist die Formel von Bass und Gura zur Berechnung der Reglerverstärkungen \mathbf{k} für die Vorgabe der Pole $\boldsymbol{\alpha}$.

Steuerbarkeitsmatrix \mathcal{C} Die Matrix \mathcal{C} spielt eine wichtige Rolle in der Regelungstechnik; sie heißt Steuerbarkeitsmatrix. Die Argumente von Bass und Gura beweisen den wichtigen

Satz 1 Die Pole einer Zustandsdarstellung $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ können durch Zustandsrückführung genau dann beliebig verschoben werden, wenn die Steuerbarkeitsmatrix \mathcal{C} nicht singulär, d.h. invertierbar ist, und das ist sie, wenn sie vollen Rang hat.

Man nennt diese Eigenschaft Steuerbarkeit und das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ (vollständig) steuerbar.

→ Abschnitt 1.2.2.2

Ähnlich wie eine Dualität zwischen Regler- und Beobachter-Normalform besteht, existiert eine solche auch zwischen der Steuerbarkeit und der Beobachtbarkeit, die wie folgt definiert ist:

Definition 1 Das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ heißt beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O}

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} nicht singulär, d.h. invertierbar ist, und das ist sie, wenn sie vollen Rang hat.

Das Tripel $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ heißt steuerbar und beobachtbar, wenn das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ steuerbar und das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ beobachtbar ist.

Beispiel 4 Der unregelte Stab in der Regler-Normalform des Beispiels 3 soll jetzt durch einen Zustandsregler stabilisiert werden, dessen Regler-Koeffizienten nach dem Verfahren von Bass und Gura berechnet werden sollen.

Die beiden Pole des unregelten Systems liegen bei

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{g/l},$$

d.h.

$$a(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = s^2 - g/l = s^2 - 9,$$

und die beiden Pole des geregelten Systems sollen bei

$$s_{1,2} = -1 \pm j$$

liegen, d.h.

$$a_k(s) = \alpha(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = s^2 + 2s + 2.$$

Für dieses überschaubare Beispiel soll zunächst der Koeffizientenvergleich aus der Beziehung (3.7) durchgeführt werden

$$\alpha(s) - a(s) = \mathbf{k}^T (\mathbf{I}s + \mathbf{A} + a_1 \mathbf{I}) \mathbf{b}$$

und eingesetzt

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - a_1)s + \alpha_0 - a_0 &= (k_1 \quad k_2) \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (k_1 \quad k_2) \begin{pmatrix} s + a_1 & 1 \\ -a_0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (k_1 \quad k_2) \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} = k_1 + k_2 s. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$k_1 = \alpha_0 - a_0 = 11$$

und

$$k_2 = \alpha_1 - a_1 = 2.$$

Bei direkter Anwendung der Beziehung (3.10) von Bass und Gura ist zuerst die Steuerbarkeitsmatrix \mathcal{C} zu ermitteln. Das Matrix-Vektor-Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ in Regler-Normalform lautet für Systeme zweiter Ordnung allgemein:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus wird

$$\mathcal{C} = (\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

berechnet, und dann

$$\mathcal{C}\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{I}}_2; \quad (3.12)$$

dies ist die Einheitsmatrix, deren Spalten vertauscht sind. Die Invertierung dieser Matrix ändert diese nicht. Wird diese Matrix mit einem Vektor multipliziert, dann kehrt sich die Reihenfolge der Elemente des Vektors um. Jetzt kann \mathbf{k} ermittelt werden:

$$(k_1 \quad k_2) = (\alpha_1 - a_1 \quad \alpha_0 - a_0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1),$$

dieses Resultat stimmt natürlich mit dem durch direkten Koeffizientenvergleich erhaltenen überein.

In diesem Beispiel liegt die Zustandsform in Regler-Normalform vor. Dadurch lassen sich die Elemente des Vektors \mathbf{k}_R der Reglerverstärkungen besonders einfach berechnen. Die Beziehung (3.12)

$$\mathcal{C}\mathcal{T} = (e_n \quad e_{n-1} \quad \cdots \quad e_1) = \tilde{\mathbf{I}}_n;$$

mit e_j der j -ten Spalte der Einheitsmatrix I_n , gilt nämlich allgemein für Darstellungen beliebiger Ordnung in Regler-Normalform, und damit ist deren Verstärkungsvektor

**\mathbf{k}_R für
Regler-Normalform**

$$(k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n) = (\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1}). \quad (3.13)$$

Diese einfache Formel bedingt die Beliebtheit der Regler-Normalform.

Übung 17 Wegen der einfachen Form des Vektors $\mathbf{b}_R = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)$ wird die Matrix $\mathbf{A}_R - \mathbf{b}_R \mathbf{k}_R^T$

$$\mathbf{A}_R - \mathbf{b}_R \mathbf{k}_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) & \cdots & \cdots & -(a_{n-1} + k_n) \end{pmatrix}$$

Bilden Sie die Determinante $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_R + \mathbf{b}_R\mathbf{k}_R^T|$, und bestätigen Sie aus den Koeffizienten des so erhaltenen charakteristischen Polynoms die Reglerverstärkungen (3.13).

→ Abschnitt 1.2.4

Liegt die Zustandsdarstellung (\mathbf{A}, \mathbf{b}) nicht in Regler-Normalform vor, dann kann sie durch die Ähnlichkeitstransformation

$$\mathbf{T} = \mathcal{C}\mathcal{C}_R^{-1} = \mathcal{C}\tilde{\mathbf{T}} \quad (3.14)$$

in Regler-Normalform umgeformt werden, und dann gilt:

$$\mathbf{k}^T \mathbf{T} = \mathbf{k}_R^T.$$

3.1.2.1.2 Formel von Ackermann Die Berechnung des Reglervektors \mathbf{k} nach der Formel von Ackermann[1]

$$\mathbf{k}^T = e^T \alpha(\mathbf{A})$$

benötigt die letzte Zeile

$$e^T = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)\mathcal{C}^{-1}$$

der inversen Steuerbarkeitsmatrix und das charakteristische Polynom

$$\alpha(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}$$

Übung 18 Berechnen Sie den Reglervektor \mathbf{k} für den zu stabilisierenden Stab in Beispiel 4 nach der Formel von Ackermann.

3.1.2.2 Linear-quadratischer Regler-Entwurf

Die Methoden des linear-quadratischen Regler-Entwurfs spielen in der Zustandsraumdarstellung eine überragende Rolle [3, 30]. Es soll durch geeignete Wahl der Steuerfunktion $u(t)$ die Zielfunktion J

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (qy^2(t) + ru^2(t))dt + \phi(\mathbf{x}(t_f)) \quad (3.15)$$

unter den (Gleichungs-) Nebenbedingungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.16a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (3.16b)$$

minimiert werden.

Die Problemstellung geht davon aus, daß sich das Differentialgleichungssystem (3.16) vor dem Zeitpunkt t_0 in einem stationären Ruhe-Zustand $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ befindet. Zum Zeitpunkt t_0 werde dieser Zustand gestört, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Aufgabe einer Steuerung $u(t)$ ist es, das System möglichst schnell und ohne große Ausschläge der Zustandsvariablen $\mathbf{x}(t)$ und der Steuervariablen $u(t)$ in einen Endzustand $\mathbf{x}(t_f)$ zu überführen, der vom ursprünglichen Ruhezustand möglichst wenig abweicht. Zielfunktionen der Art (3.15) sind Ihnen schon in den Versuchen der Grundvorlesung Regelungstechnik begegnet.

→ Versuch No. 15, 40

Die Problemstellung ist eingebettet in den allgemeinen Problemkreis der Funktionen-Optimierung mit Differentialgleichungen als Nebenbedingungen [8]. Diese wird im folgenden allgemein formuliert und dann auf den Spezialfall quadratischer Zielfunktionen mit linearen (Zustands-) Differentialgleichungen als Nebenbedingungen reduziert.

3.1.2.2.1 Variations-Problem Eine weitgehend allgemeine Formulierung lautet: finde im Intervall $t_0 \leq t \leq t_f$, wobei die Endzeit t_f vorgegeben oder frei sein kann, eine Steuerfunktion $\mathbf{u}(t)$, die die Zielfunktion

$$J(\mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt + \phi(\mathbf{x}(t_f)) \quad (3.17)$$

unter den differentiellen Nebenbedingungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.18)$$

minimiert. Die Gleichungsnebenbedingungen, $\dot{\mathbf{x}}(t) - f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = 0$, werden mit Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}(t)$ an die Zielfunktion angekoppelt. Diese Technik in der Optimierung geht auf Lagrange zurück. Die erweiterte, nun unbeschränkte, Zielfunktion lautet:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (L + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt + \phi,$$

wobei die Funktionsargumente der Einfachheit halber weggelassen sind. Mit der Hamiltonschen Funktion

$$H = L + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}$$

erhält man

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}) dt + \phi,$$

und durch partielle Integration wird $\dot{\mathbf{x}}$ eliminiert

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (H + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x} \Big|_{t_0}^{t_f} + \phi.$$

Von dieser Funktion wird nun (analog zum ersten Differentialquotienten) die erste Variation² δJ gebildet:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt + \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{x} \Big|_{t=t_0} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T \right) \delta \mathbf{x} \Big|_{t=t_f}.$$

In dieser Beziehung ist $\delta \mathbf{x}_{t_0} = 0$, da \mathbf{x}_0 gegeben ist und sich nicht ändert. Sie kann weiter vereinfacht werden, wenn

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) = - \frac{\partial H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t)}{\partial \mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t=t_f} \quad (3.19)$$

gefordert wird. Dann wird die erste Variation der Zielfunktion

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dt,$$

und eine notwendige Bedingung, daß die Zielfunktion ein Minimum erreicht, ist $\delta J = 0$, d.h.

$$\frac{\partial H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t)}{\partial \mathbf{u}} = 0. \quad (3.20)$$

Die Gleichungen (3.19) und (3.20) sind die Bestimmungsgleichungen für die minimierende Steuerfunktion $\mathbf{u}(t)$. Sie werden nach Euler und Lagrange benannt. Gleichung (3.19) definiert den zu \mathbf{x} nach Gleichung (3.18) adjungierten Ko-Zustand $\boldsymbol{\lambda}$.

² Man nennt diesen Zweig der Analysis deshalb auch Variationsrechnung.

3.1.2.2.2 Linear-quadratisches Variations-Problem Beim linear-quadratischen Variations-Problem beschränken wir uns auf die Zielfunktion

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (y^2 + ru^2) dt, \quad (3.21)$$

d.h. $\phi = 0$ und

$$L = \frac{1}{2}(y^2 + ru^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T \mathbf{c} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + ru^2).$$

Mit dem Faktor $r \neq 0$ wird der Anteil der Steuerfunktion gegenüber dem der Zustandsvariablen in der Zielfunktion gewichtet. Mit $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ wird die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T \mathbf{c} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + ru^2) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u) \quad (3.22)$$

und die Euler-Lagrange Differentialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}(t) - \mathbf{c} \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0.$$

Aus den Bedingungen (3.20) und (3.22) läßt sich die optimale Steuerfunktion $u(t)$

$$u(t) = -r^{-1} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (3.23)$$

als Rückkopplungssteuerung berechnen. Wird diese in die System-Differentialgleichung (3.18) eingesetzt, so wird ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem der Ordnung $2n$ erhalten

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b}r^{-1}\mathbf{b}^T \\ -\mathbf{c}\mathbf{c}^T & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

dessen Randwerte $(\mathbf{x}(t_0), \boldsymbol{\lambda}(t_f))$ allerdings getrennt an t_0 und t_f vorliegen, und das deshalb schwierig zu lösen ist [30]. Es kann zwischen $\boldsymbol{\lambda}$ und \mathbf{x} eine lineare Beziehung,

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$

mit einer symmetrischen Matrix $\mathbf{P}(t)$, gezeigt werden [30]. Für ein steuer- und beobachtbares Tripel $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ist die Matrix \mathbf{P} für $t_f \rightarrow \infty$ konstant

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t). \quad (3.25)$$

3.1.2.2.3 Stationäres Verhalten Im folgenden beschränken wir uns auf $t_f \rightarrow \infty$ und erhalten mit den Beziehungen (3.23) und (3.25) das Regelgesetz

$$u(t) = -r^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{P}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t), \quad (3.26)$$

wobei angenommen ist, daß $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ eine stabile Matrix ist. Dieses Regelgesetz stimmt mit dem in Gleichung (3.5) formulierten überein. Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, daß der Verstärkungsvektor \mathbf{k} vom Anfangszustand \mathbf{x}_0 des Systems unabhängig ist.

Zur Berechnung der Matrix \mathbf{P} werden Gleichung (3.25) und Gleichung (3.26) in die Differentialgleichungen (3.24) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}\mathbf{b}u(t) \\ &= (\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{b}r^{-1}\mathbf{b}^T\mathbf{P})\mathbf{x}(t) \\ &= (-\mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{c}\mathbf{c}^T)\mathbf{x}(t) = \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t), \end{aligned}$$

welche Beziehung für

$$\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{b}r^{-1}\mathbf{b}^T\mathbf{P} = -\mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{c}\mathbf{c}^T$$

erfüllt wird, die als

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{b}r^{-1}\mathbf{b}^T\mathbf{P} + \mathbf{c}\mathbf{c}^T = 0 \quad (3.27)$$

geschrieben eine (quadratische) Riccati-Gleichung für die unbekannte Matrix \mathbf{P} ist. Es kann gezeigt werden, daß von den vielen möglichen Lösungen nur eine stabilisierende existiert, und diese ist positiv definit:

$$\mathbf{s}^T\mathbf{P}\mathbf{s} > 0, \quad \forall \mathbf{s} \neq \mathbf{0}.$$

Ein stabiles numerisches Lösungsverfahren für diese Matrixgleichung hat Laub [32] angegeben. Die Riccati-Gleichung (3.27) wird auch durch \mathbf{P}^T erfüllt, was die Symmetrie von \mathbf{P} beweist:

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}.$$

Übung 19 Als Übung sei Ihnen der Beweis dafür überlassen, daß der Wert der minimalen Kostenfunktion als

$$J_{\min} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x}_0 \quad (3.28)$$

berechnet werden kann.

Beispiel 5 Es soll ein Riccati-Regler \mathbf{k} für den zu balancierenden Stab des Beispiels 1 entworfen werden. Der Entwurfsvorgang sei allgemein an einem System zweiter Ordnung in Regler-Normalform gezeigt, erst am Ende sollen die aktuellen Werte für den Stab eingesetzt werden. Die Systemgleichungen sind

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ y(t) &= (b_0 \quad b_1)\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Damit kann die Riccati-Gleichung (3.27) explizit geschrieben werden

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \\ - \frac{1}{r} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \quad 1) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} (b_0 \quad b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und ausmultipliziert

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -a_0p_{12} & p_{11} - a_1p_{12} \\ -a_0p_{22} & p_{12} - a_1p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_0p_{12} & -a_0p_{22} \\ p_{11} - a_1p_{12} & p_{12} - a_1p_{22} \end{pmatrix} \\ - \frac{1}{r} \begin{pmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0^2 & b_0b_1 \\ b_0b_1 & b_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der elementweise Vergleich ergibt (wegen der Symmetrie) drei gekoppelte quadratische Bestimmungsgleichungen für die Elemente der Matrix \mathbf{P}

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r}p_{12}^2 - 2a_0p_{12} + b_0^2 &= 0, \\ -\frac{1}{r}p_{12}p_{22} + p_{11} - a_1p_{12} - a_0p_{22} + b_0b_1 &= 0, \\ -\frac{1}{r}p_{22}^2 + 2(p_{12} - a_1p_{22}) + b_1^2 &= 0, \end{aligned}$$

die aufgelöst

$$\begin{aligned} p_{12} &= -ra_0 \pm \sqrt{r^2 a_0^2 + rb_0^2}, \\ p_{22} &= +ra_1 \pm \sqrt{r^2 a_1^2 + rb_1^2 + 2rp_{12}}, \\ p_{11} &= a_1 p_{12} + a_0 p_{22} - \frac{1}{r} p_{12} p_{22} + b_0 b_1, \end{aligned}$$

ergeben, deren stabilisierende Lösung mit $a_0 = -9$, $a_1 = 0$, $b_0 = -1$, $b_1 = 0$ und $r = 1$

$$\begin{aligned} p_{11} &= 54.416, \\ p_{12} &= 18.055, \\ p_{22} &= 6.009, \end{aligned}$$

sind. Mit diesen Werten in Gleichung (3.26) eingesetzt wird \mathbf{k} berechnet als

$$\mathbf{k} = (18.055 \quad 6.009).$$

Abbildung 3.4: Entwurf nach Polvorgabe und LQR-Optimierung

Für diese \mathbf{k} sollen nun noch die Pole des stabilisierten Stabes, das sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T|$ der Übertragungsfunktion oder die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$, ermittelt werden. Man berechnet

$$\begin{vmatrix} s & -1 \\ a_0 + k_1 & s + a_1 + k_2 \end{vmatrix} = s^2 + (a_1 + k_2)s + a_0 + k_1 = 0$$

mit den Wurzeln $s_{1,2} = -3.005 \pm 0.116j$. Man erkennt eine gut gedämpfte, schwach überschwingende Übergangsfunktion. In Abbildung 3.4 sind Steuerfunktion $u(t)$ und Ausgangsgröße $y(t)$ für $\mathbf{x}_0 = (1 \quad 0)^T$ für den Entwurf aus Beispiel 4 und aus diesem Beispiel verglichen. Man erkennt sowohl in Bezug

auf die Geschwindigkeit der Regelung als auch in Bezug auf das Überschwingen eine deutliche Verbesserung durch die Optimierung. Diese Verbesserung wird allerdings durch eine größere Stellamplitude erreicht.

Der Wert der minimalen Gütefunktion $J_{\min} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0$ ist, für $\mathbf{x}_0 = (1 \ 0)^T$, $J_{\min} = 27.208$.

3.1.3 Quadratische Gütefunktion

Die quadratische Gütefunktion im linear-quadratischen Problem

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (y^2 + ru^2) dt, \quad (3.29)$$

hat für den stationären Fall, d.h. $t_0 = 0$, $t_f \rightarrow \infty$, die besonders einfache semi-analytische Lösung

$$J_{\min} = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0,$$

mit P als Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung und den Anfangswerten $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ des Zustandsvektors.

3.1.3.1 Lyapunov-Gleichung

Kann eine ähnlich einfache Lösung für den Wert einer quadratischen Gütefunktion auch für allgemeinere Problemstellungen mit vorgegebener Reglerstruktur $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ (z.B. für das Problem der Polvorgabe) angegeben werden? Für Probleme der Struktur

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x}(t) dt$$

mit positiv semidefiniter Gewichtungsmatrix $\bar{\mathbf{Q}}$, d.h. $\bar{\mathbf{Q}}$ ist symmetrisch, und unter der Bedingung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

mit $\bar{\mathbf{A}}$ einer stabilen Matrix, ist die Antwort positiv und lautet ebenfalls

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{S} \mathbf{x}_0,$$

wobei jetzt \mathbf{S} die Lösung der Matrix-Gleichung

$$\mathbf{S} \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{S} + \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \quad (3.30)$$

der sogenannten Lyapunov-Gleichung ist. Die Matrix \mathbf{S} ist symmetrisch. Das Ergebnis folgt nach Einsetzen der Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\mathbf{x}(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^T(t) = \mathbf{x}_0^T e^{\bar{\mathbf{A}}^T t}$$

in die Gütefunktion

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \int_0^{\infty} e^{\bar{\mathbf{A}}^T t} \bar{\mathbf{Q}} e^{\bar{\mathbf{A}}t} dt \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{S} \mathbf{x}_0.$$

Die Lösung des Integrals

$$\mathbf{S} = \int_0^\infty e^{\bar{\mathbf{A}}^T t} \bar{\mathbf{Q}} e^{\bar{\mathbf{A}} t} dt$$

wird durch partielle Integration erhalten

$$\mathbf{S} = e^{\bar{\mathbf{A}}^T t} \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}}^{-1} e^{\bar{\mathbf{A}} t} \Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty \bar{\mathbf{A}}^T e^{\bar{\mathbf{A}}^T t} \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}}^{-1} e^{\bar{\mathbf{A}} t} dt,$$

und da, für stabiles $\bar{\mathbf{A}}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\bar{\mathbf{A}} t} = \mathbf{0}$ gilt

$$\mathbf{S} = -\bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}}^{-1} - \bar{\mathbf{A}}^T \int_0^\infty e^{\bar{\mathbf{A}}^T t} \bar{\mathbf{Q}} e^{\bar{\mathbf{A}} t} dt \bar{\mathbf{A}}^{-1} = -\bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}}^{-1} - \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{A}}^{-1},$$

und durch Rechtsmultiplikation mit $\bar{\mathbf{A}}$ das gewünschte Ergebnis (3.30).

Übung 20 *Vollziehen Sie die partielle Integration der angegebenen Ableitung im einzelnen nach.*

Die numerische Lösung der Lyapunov-Gleichung geschieht am effizientesten mit dem Verfahren von Bartels und Stewart [6].

3.1.3.2 Gütefunktion für Polvorgabe

Als Bewertungsfunktion des Regler-Entwurfs nach Polvorgabe bietet sich das Gütemaß

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + u(t) R u(t)] dt$$

an. Die Gleichung der Strecke ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

und das Regelgesetz

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t).$$

Dieses wird sowohl in die Strecke als auch in die Gütefunktion eingesetzt:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{k} R \mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)] dt$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \mathbf{b} \mathbf{k}^T \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Damit werden

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T$$

und

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{k} R \mathbf{k}^T,$$

und mit diesen Matrizen kann \mathbf{S} in der Lyapunov-Gleichung gelöst werden.

Beispiel 6 *Als Beispiel für die Berechnung der Gütefunktion sei das Beispiel 5 fortgesetzt. Die Systemgleichungen sind mit $u(t) = -(k_1 \quad k_2) \mathbf{x}(t)$*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t),$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$$y(t) = (b_0 \quad b_1) \mathbf{x}(t).$$

Die Gütefunktion ist

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^2(t) + u^2(t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{k}\mathbf{k}^T) \mathbf{x}(t) dt$$

Damit kann die Lyapunov-Gleichung (3.30) formuliert werden

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} (b_0 \quad b_1) + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und ausmultipliziert

$$\begin{pmatrix} -\alpha_0 s_{12} & s_{11} - \alpha_1 s_{12} \\ -\alpha_0 s_{22} & s_{12} - \alpha_1 s_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_0 s_{12} & -\alpha_0 s_{22} \\ s_{11} - \alpha_1 s_{12} & s_{12} - \alpha_1 s_{22} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} b_0^2 + k_1^2 & b_0 b_1 + k_1 k_2 \\ b_0 b_1 + k_1 k_2 & b_1^2 + k_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der elementweise Vergleich ergibt (wegen der Symmetrie von \mathbf{Q} und \mathbf{S}) drei gekoppelte lineare Bestimmungsgleichungen für die Elemente der Matrix \mathbf{S}

$$\begin{aligned} -2\alpha_0 s_{12} + b_0^2 + k_1^2 &= 0, \\ 2s_{12} - 2\alpha_1 s_{22} + b_1^2 + k_2^2 &= 0, \\ s_{11} - \alpha_0 s_{22} - \alpha_1 s_{12} + b_0 b_1 + k_1 k_2 &= 0, \end{aligned}$$

die aufgelöst

$$\begin{aligned} s_{12} &= \frac{b_0^2 + k_1^2}{2\alpha_0}, \\ s_{22} &= \frac{2s_{12} + b_1^2 + k_2^2}{2\alpha_1}, \\ s_{11} &= \alpha_0 s_{22} + \alpha_1 s_{12} - b_0 b_1 - k_1 k_2, \end{aligned}$$

ergeben, oder mit $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 2$, $b_0 = -1$, $b_1 = 0$, $k_1 = 11$ und $k_2 = 2$

$$\begin{aligned} s_{12} &= 30.50, \\ s_{22} &= 16.25, \\ s_{11} &= 71.50, \end{aligned}$$

Der Wert der Gütefunktion $J = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{S} \mathbf{x}_0$ ist, für $\mathbf{x}_0 = (1 \quad 0)^T$, $J = 35.75$, also verglichen mit dem Minimalwert aus Beispiel 5 $J/J_{\min} = 1.314$.

3.2 Führungsverhalten

In der Zustandsdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.31a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad (3.31b)$$

ist bisher nur das Regelgesetz

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)$$

→ Kompendium:
Abschnitt 2.1.4.4

eingehender untersucht worden. Durch seinen Einsatz können Störungen in den Anfangswerten der Zustandsvariablen $\mathbf{x}(t_0) \neq 0$ auf Null zurückgeregelt werden. Dieses Problem wird im angelsächsischen Sprachbereich als Regulatorproblem bezeichnet. Das Regulatorproblem ist eng verwandt mit dem Problem der Ausregelung von Störungen in der klassischen Regelungstechnik. Das Blockschaltbild des Regulatorproblems zeigt Abbildung 3.5.

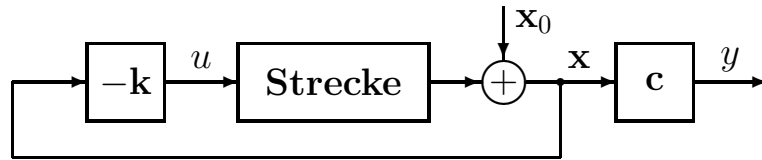


Abbildung 3.5: Regulator-Problem

Das zum Problem des Führungsverhaltens analoge Problem heißt in der Zustandsdarstellung Servo-Problem. Es unterscheidet sich vom Regulatorproblem durch den externen Eingang $w(t)$, dem die Ausgangsgröße $y(t)$ möglichst genau folgen soll. Dementsprechend spricht man auch vom Modell-Folge-Problem, falls $w(t)$ der Ausgang eines voranliegenden dynamischen Modell-Systems ist. Das Blockschaltbild des Servo-Problems zeigt Abbildung 3.6.

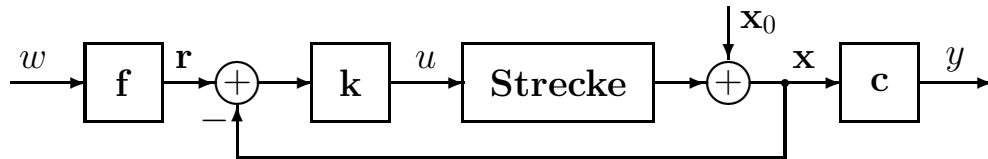


Abbildung 3.6: Servo-Problem mit Vorfilter

3.2.1 Vorfilter

Im Servo-Problem wird ein Vorfilter \mathbf{f} entworfen, das den skalaren Führungseingang w in einen Führungsvektor \mathbf{r} transformiert, der ein Gleichgewichtszustand für das betreffende \mathbf{r} ist

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}w. \quad (3.32)$$

Wendet man dieses Vorfilter in Kombination mit dem Regelgesetz,

$$u = -\mathbf{k}^T(\mathbf{x} - \mathbf{r}),$$

→ Kompendium: Abschnitt 2.3.5 auf Systeme vom Systemtyp 1 an, dann erhält man für Sprungfunktionen als Eingangsfunktionen w stationäre Genauigkeit, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\infty = \mathbf{r}.$$

Andererseits soll $y = w$ gelten und damit

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_\infty = \mathbf{c}^T \mathbf{r}$$

und mit Gleichung (3.32)

$$\mathbf{c}^T \mathbf{f} = 1. \quad (3.33)$$

Hieraus kann \mathbf{f} bestimmt werden.

3.2.2 Vorsteuerung

Bei Systemen vom Typ 0 und Sprungfunktionen als Eingangsgrößen oder bei komplexen Anordnungen kann eine Vorsteuerung, die den stationären Gleichgewichtszustand aufrecht erhält, notwendig sein. Sie hat die Form

$$u_\infty = f_u w, \quad (3.34)$$

mit f_u dem Filter der Vorsteuerung. Das Blockschaltbild dieser Konfiguration zeigt Abbildung 3.7.

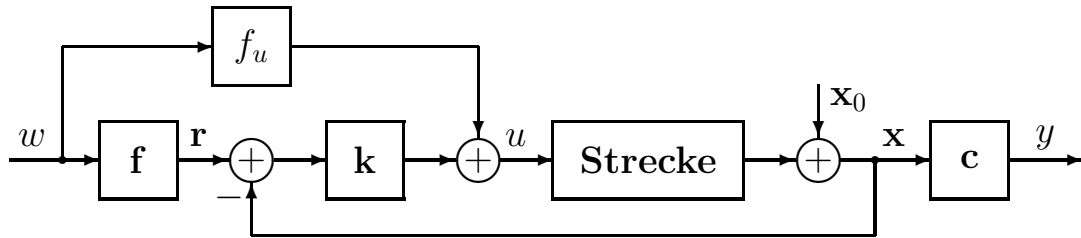


Abbildung 3.7: Servo-Problem mit Vorfilter und Vorsteuerung

Für stationäres $\mathbf{x}_\infty = \mathbf{r}$ gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_\infty + \mathbf{b}u_\infty = \mathbf{0}$$

und mit den Beziehungen (3.32) und (3.34)

$$\mathbf{A}\mathbf{f}w + \mathbf{b}f_u w = \mathbf{0}.$$

Das muß für alle w gelten, also

$$\mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{b}f_u = \mathbf{0},$$

was zusammen mit Gleichung (3.33)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ f_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Matrix-Gleichung zur Berechnung von \mathbf{f} und f_u ergibt:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ f_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Beispiel 7 Ein Zustandsmodell $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ für die Lage eines Satelliten, mit dem Massenträgheitsmoment J , der sich im All dämpfungs- und reibungsfrei bewegt, ist

→ Übungen zur
Prozeßautomation

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J \end{pmatrix} u(t), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ y(t) &= (1 \ 0)\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Der Satellit wird durch das Moment $u(t)$ einer Steuerdüse gesteuert. Sein Lagewinkel $\theta(t) = x_1(t)$ soll durch geeignete Wahl eines Vorfilters \mathbf{f} und einer Vorsteuerung f_u von $\theta(t_0) = 0$ nach $w = \theta(t_f) = 1$ gesteuert werden.

Der Regelfehler $e(t) = w(t) - y(t)$ soll asymptotisch gegen Null gehen. Das Trägheitsmoment sei $J = 1$.

Dabei soll ein Zustandsregler ($k_1 \quad k_2$) verwendet werden, der die Pole des geregelten Systems nach $s_{1,2} = -4 \pm 4j$ verschiebt. Mit der Funktion `acker` oder `place` aus MATLAB berechnet man sehr einfach (auch mit Papier und Bleistift ist das noch mit vertretbarem Zeitaufwand mit den Verfahren nach Abschnitt 3.1.2.1 zu schaffen)

$$\mathbf{k} = (32 \quad 8)^T.$$

Aus Gleichung (3.35) erhält man

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ f_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und daraus (überprüfen Sie das Ergebnis durch Inversion oder wenigstens durch Einsetzen)

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_u = 0.$$

Die Simulationsstruktur ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Die Streckensteuerung ist

$$u = \mathbf{k}^T (\mathbf{f}w - \mathbf{x}) = \mathbf{k}^T \mathbf{f}w - \mathbf{k}^T \mathbf{x}.$$

mit $\mathbf{A}_F = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ und $\mathbf{b}_F = \mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{f}$ erhält man die Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_F \mathbf{x} + \mathbf{b}_F w, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

des geregelten Systems, das nun einfach mit einer entsprechenden CAD-Routine (z.B. `lsim` aus MATLAB) simuliert werden kann. Der Graph des Lagewinkels θ aus der Simulation ist in Abbildung 3.8 dargestellt.

Abbildung 3.8: Satelliten-Regelung mit Vorfilter

Bei Systemen vom Typ 1 ist bei $w = \kappa\sigma$, einem Eingangssprung, das Vorsteuer-Filter $f_u = 0$, bei Systemen vom Typ 0 dagegen $f_u \neq 0$. Um stationär genaues Führungsverhalten zu erzeugen wird anstelle einer Vorsteuerung auch ein Integral-Anteil zum Regelgesetz hinzugefügt. Dieser Ansatz wird im nächsten Abschnitt behandelt.

3.3 Integrale Regelung

Im Grundstudium der Regelungstechnik [27] wird der Integral-Anteil eines PI- oder PID-Reglers als der Anteil entwickelt, der stationäre Genauigkeit im Führungs- und Störverhalten erzeugt. Es liegt deshalb nahe, neben dem Systemzustand auch einen Integral-Anteil des Systemausgangs zurückzuführen.

3.3.1 Reglerstruktur

In der Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

werde neben $\mathbf{x}(t)$ auch

$$x_0(t) = \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{c}^T \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

zurückgeführt. Eine einheitliche Darstellung dieses Ansatzes erhält man durch Erweiterung des Systemzustandes \mathbf{x} um das Integral x_0 :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{c}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} u(t). \quad (3.36)$$

Das Regelgesetz lautet dann

$$u(t) = - \begin{pmatrix} k_0 & \mathbf{k}_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{pmatrix}.$$

Ein Blockschaltbild der Anordnung zeigt Abbildung 3.9.

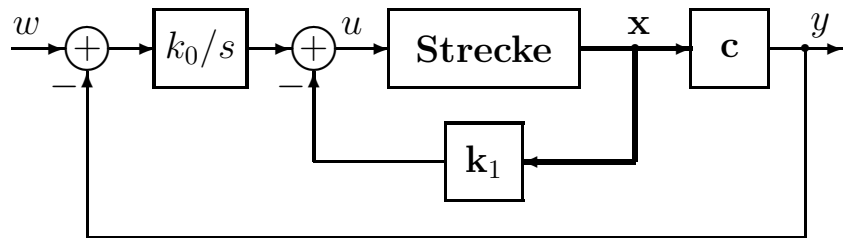


Abbildung 3.9: Integral-Regelung

Beachten Sie, daß in der Konfiguration des Blockschaltbildes der Regelfehler

$$e(t) = w(t) - y(t),$$

nicht die Ausgangsgröße $y(t)$ alleine, integriert werden muß.

3.3.2 Reglerparameter

Die Reglerparameter

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_0 & \mathbf{k}_1^T \end{pmatrix}^T$$

→ Abschnitt 3.1.2.1
und 3.1.2.2

können durch Polvorgabe oder linear-quadratischen Optimalregler-Entwurf bestimmt werden.

Beispiel 8 Für den Satelliten aus Beispiel 7 soll eine integrale Lage-Regelung entworfen werden. Das Zustandsmodell der Strecke ist

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J \end{pmatrix} u(t), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ y(t) &= (1 \ 0) \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Der Lagewinkel $\theta(t) = x_1(t)$ soll durch geeignete Wahl von $u(t)$ von $\theta(t_0) = 0$ nach $w = \theta(t_f) = 1$ gesteuert werden. Der Regelfehler $e(t) = w(t) - y(t)$ soll asymptotisch gegen Null gehen. Das Trägheitsmoment sei $J = 1$. Mit

$$x_0(t) = \int_{t_0}^t (w(\tau) - y(\tau)) d\tau = \int_{t_0}^t (w(\tau) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}(\tau)) d\tau$$

wird die Beziehung (3.36)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_0 \ k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w.$$

Dabei soll ein Zustandsregler ($k_1 \ k_2$) verwendet werden, durch den die Pole des geregelten Systems bei $s_{1,2} = -4 \pm 4j$ zu liegen kommen. Die Integralverstärkung k_0 werde so gewählt, daß der Integrator-Pol einmal bei $s_0 = -1$, dann bei $s_0 = -10$ liegt.

Mit der Funktion `acker` oder `place` aus MATLAB berechnet man sehr einfach

$$\mathbf{k}_{-1} = (32 \ 40 \ 9)^T$$

und

$$\mathbf{k}_{-10} = (320 \ 112 \ 18)^T.$$

Die Simulation ist in Abbildung 3.10 dargestellt.

Abbildung 3.10: Simulation des Integral-geregelten Satelliten

4 Zustandsschätzung

Die weitere Untersuchung des geregelten Systems (4.1)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.1a)$$

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t), \quad (4.1b)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad (4.1c)$$

führt auf ein Verfügbarkeitsproblem. Das bemerkenswerte Ergebnis des vorangegangenen Abschnitts, daß bei vollständiger Steuerbarkeit des Paares $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ die Pole des geregelten Systems durch Rückführung des gesamten Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ bei geeigneter Wahl der Reglermatrix \mathbf{k} an beliebige Stelle plaziert werden können, bedingt eine Voraussetzung: der gesamte Zustandsvektor muß verfügbar sein. In aller Regel ist die Messung aller Zustandsvariablen technisch nicht möglich oder wirtschaftlich nicht vertretbar.

Verfügbar ist eine Anzahl von Informationen über das System, seine Ein- und Ausgänge, nämlich $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot)\}$. Kann daraus eine Näherung $\hat{\mathbf{x}}$ des Zustands rekonstruiert oder geschätzt werden? Eine solche Approximation ist möglich, und deren Bedingungen werden im folgenden entwickelt. Nach Erhalt der Zustandsschätzung ändert sich an der Struktur des Regelgesetzes nichts, statt der nicht verfügbaren Zustandsvariablen \mathbf{x} werden deren Schätzwerte $\hat{\mathbf{x}}$ zurückgeführt

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}}(t). \quad (4.2)$$

4.1 Beobachter-Struktur

Da $\mathbf{x}(\cdot)$ eine zeitveränderliche „dynamische“ Variable ist, soll dies natürlich auch $\hat{\mathbf{x}}(\cdot)$ sein, das bedeutet aber, daß zu deren Rekonstruktion ein dynamisches System vom Typ (4.1a) notwendig ist, und es möge sowohl $u(t)$ als auch $y(t)$ als Eingang haben:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}u(t) + \mathbf{h}y(t). \quad (4.3)$$

Ein Blockschaltbild der Anordnung zeigt Abbildung 4.1.

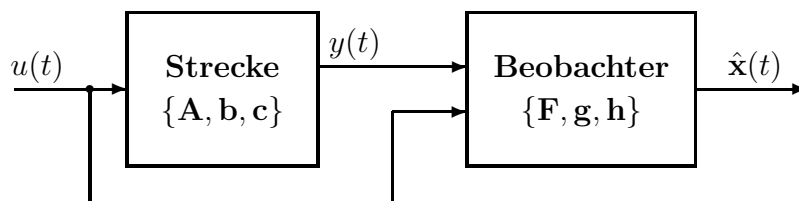


Abbildung 4.1: Beobachter-Grobstruktur

Welche Bedingungen sind an das Tripel $\{\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{h}\}$ zu stellen? Zunächst erscheint es plausibel, daß die Übertragungsfunktionen

$$\frac{\hat{X}_i(s)}{U(s)} = \frac{X_i(s)}{U(s)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

der Dynamik des Schätzers (oder Beobachters) und der Streckendynamik gleich sein sollen. Es sind

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(s)$$

und

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{g} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}]U(s).$$

→ Kompodium: 2.1.1 **Übung 21** Verifizieren Sie die beiden letzten Beziehungen durch Laplace-Transformation der Gleichungen (4.1a) und (4.3).
Abschnitt

Es soll also

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{g} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}]$$

gelten. Um Bedingungen dieser Gültigkeit zu erhalten, werden zunächst die Terme von $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ zusammengefaßt

$$[\mathbf{I} - (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{h}\mathbf{c}^T](s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{g},$$

und dann wird $(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$ links vor die Klammer faktorisiert

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T](s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{g}.$$

Hieraus folgt

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{g}$$

oder umgeordnet

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = (s\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)^{-1}\mathbf{g}.$$

Besonders einfach wird diese Beziehung für

$$\mathbf{g} = \mathbf{b}, \tag{4.4}$$

Beobachter-Matrix nämlich

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T. \tag{4.5}$$

Mit dieser Wahl erhält man die Beobachter-Dynamik (4.3)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{h}y(t), \\ &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{h}(y(t) - \hat{y}(t)), \end{aligned} \tag{4.6}$$

deren Übergangsverhalten (Schnelligkeit) durch geeignete Wahl von \mathbf{h} vorteilhaft beeinflusst werden kann. Man beachte, daß ein Modell der Strecke Teil des Beobachters ist. Während aber die Strecke ein komplexer technisch-physikalischer (oder ökonomischer oder soziologischer) Prozeß ist, kann das Modell eine Implementierung als elektronisches Netzwerk oder als Softwaremodul im Prozeßrechner sein.

Übung 22 Die oben angegebene Herleitung der Beobachter-Bedingungen (4.4) und (4.5) bleibt vollkommen im Frequenzbereich. Versuchen Sie eine Ableitung im Zeitbereich durch Betrachtung des Schätzfehlers als Differenz von $\mathbf{x}(t)$ und $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Dieser soll asymptotisch ($t \rightarrow \infty$) verschwinden. Hinweis: Subtrahieren Sie die entsprechenden Differentialgleichungen voneinander.

4.1.1 Blockschaltbilddarstellung

Die Blockschaltbilddarstellung des mit den Schätzwerten des Zustands geregelten Systems geschieht in drei Schritten.

1.) Der erste Schritt zur Konstruktion eines Zustandsschätzers wird in Abbildung 4.2 dargestellt. Sie zeigt im oberen Teil die Regelstrecke (4.1a) und im unteren Teil deren Modell (4.6), wobei der letzte Summand von (4.6) zwar als Abweichung $\tilde{y}(t)$ der Ausgangsgröße $y(t)$ von ihrer Schätzung $\hat{y}(t)$ gebildet aber noch nicht dem Modell aufgeschaltet wird.

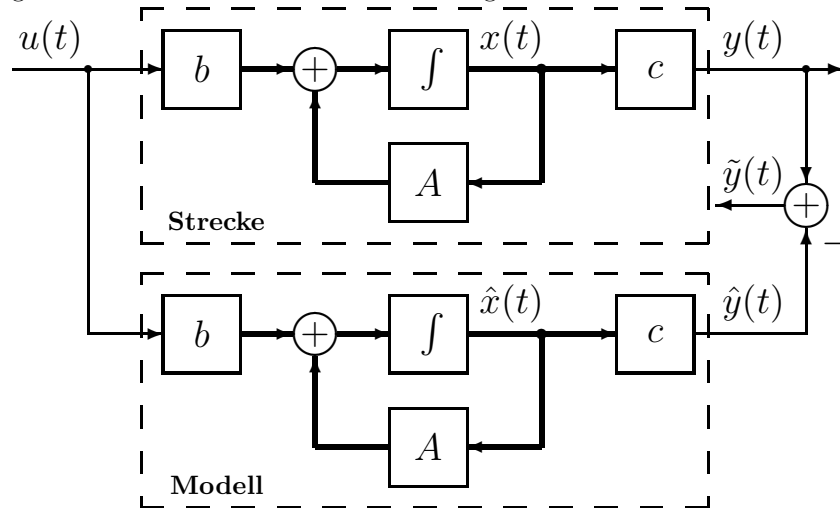


Abbildung 4.2: Strecke und Modell

2.) Dieser nächste Schritt geschieht erst in Abbildung 4.3. Die Ausgangsgrößenabweichung wird mit dem Verstärkungsvektor \mathbf{h} bewertet und dem Modell der Strecke aufgeschaltet. Beachtet sei die Gegenkopplung wegen der Subtraktion an der Summationsstelle ($-\hat{y}$). Der Beobachter ist also selbst bereits ein geregeltes System. Dies trifft für die Strecke in Abbildung 4.3 noch nicht zu. Deutlich sind die beiden Beobachter-Eingänge u und y zu erkennen.

3.) Der letzte Schritt geschieht in Abbildung 4.4. Es wird das modifizierte Regelgesetz (4.2) implementiert. Die Schätzgröße $\hat{\mathbf{x}}$ wird mit dem Reglervektor \mathbf{k} bewertet und der Strecke aufgeschaltet. Beachtet sei wiederum die Gegenkopplung wegen der Subtraktion an der Summationsstelle des Streckeneingangs. Das geregelte Gesamtsystem ist somit implementiert.

4.1.2 Beobachterpole

Die Wahl der Pole der charakteristischen Gleichung,

$$a_h(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T| = 0, \quad (4.7)$$

der Beobachterdynamik (4.6) durch geeignete Werte des Vektors \mathbf{h} geschieht allgemein wie in Abschnitt 3.1.2.1. Polvorgabe ist die Aufgabe, \mathbf{h} so zu bestimmen, daß

$$a_h(s) = \alpha(s)$$

für ein Polynom $\alpha(s)$ mit vorgegebenen Koeffizienten $\boldsymbol{\alpha}$ (entsprechend der gewünschten Pollagen s_i) wird. Dort wird sie für das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ und den

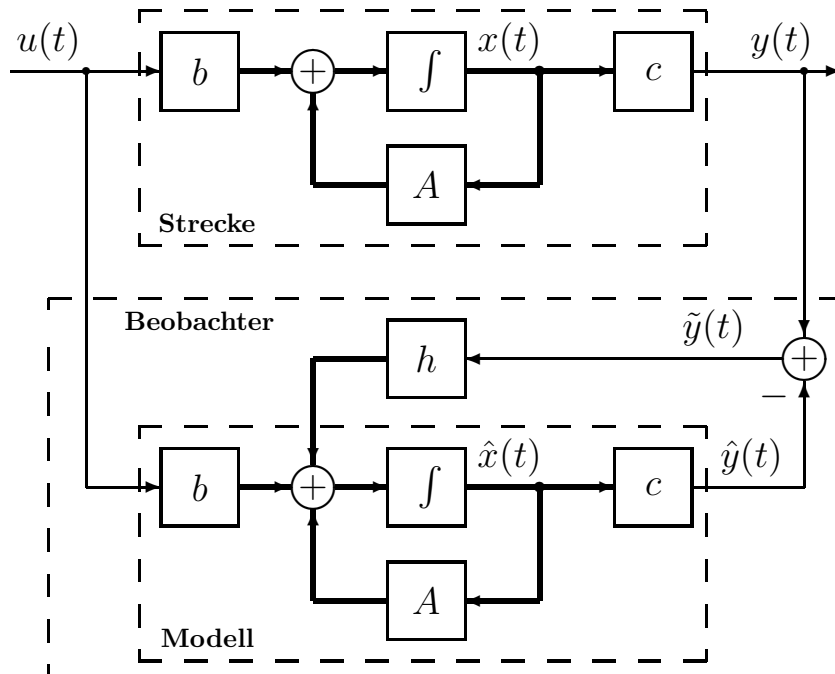


Abbildung 4.3: Beobachter-Feinstruktur

Reglervektor \mathbf{k} vorgenommen (3.6), hier für das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ und den Beobachtervektor \mathbf{h} .

Um die Formel von Bass und Gura (3.10)

$$\mathbf{k}^T = (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a})\mathcal{T}^{-1}\mathcal{C}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

anwenden zu können, wird Gleichung (4.7) umgeformt

$$a_h(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T + \mathbf{c}\mathbf{h}^T| = 0. \quad (4.8)$$

Substituiert man nun in der Definition der Steuerbarkeitsmatrix (3.9) folgendermaßen $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^T$ und $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$ und außerdem $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{h}$, so erhält man den freien Beobachtervektor \mathbf{h} aus

$$\mathbf{h}^T = (\boldsymbol{\alpha}_B - \mathbf{a})\mathcal{T}^{-1}\mathcal{C}^{-1}(\mathbf{A}^T, \mathbf{c}^T),$$

oder

$$\mathbf{h} = \mathcal{O}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{c})\mathcal{T}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_B - \mathbf{a})^T,$$

wobei $\boldsymbol{\alpha}_B$ die gewünschten Beobachter-Pole $\mathcal{C}(\mathbf{A}^T, \mathbf{c}) = \mathcal{O}^T(\mathbf{A}, \mathbf{c})$ die transponierte Beobachtbarkeitsmatrix des Paares $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ ist. Es gilt der zu Satz 1 duale

→ Satz 1, Seite 32

Satz 2 Die Beobachter-Pole des Paares $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ können durch Rückführung des Schätzfehlers der Ausgangsgröße genau dann beliebig verschoben werden, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} nicht singular, d.h. invertierbar ist, und das ist sie, wenn sie vollen Rang hat.

Man nennt das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ (vollständig) beobachtbar.

→ Abschnitt 1.2.2.2

Liegt die Zustandsdarstellung in Beobachter-Normalform (1.19) vor, dann

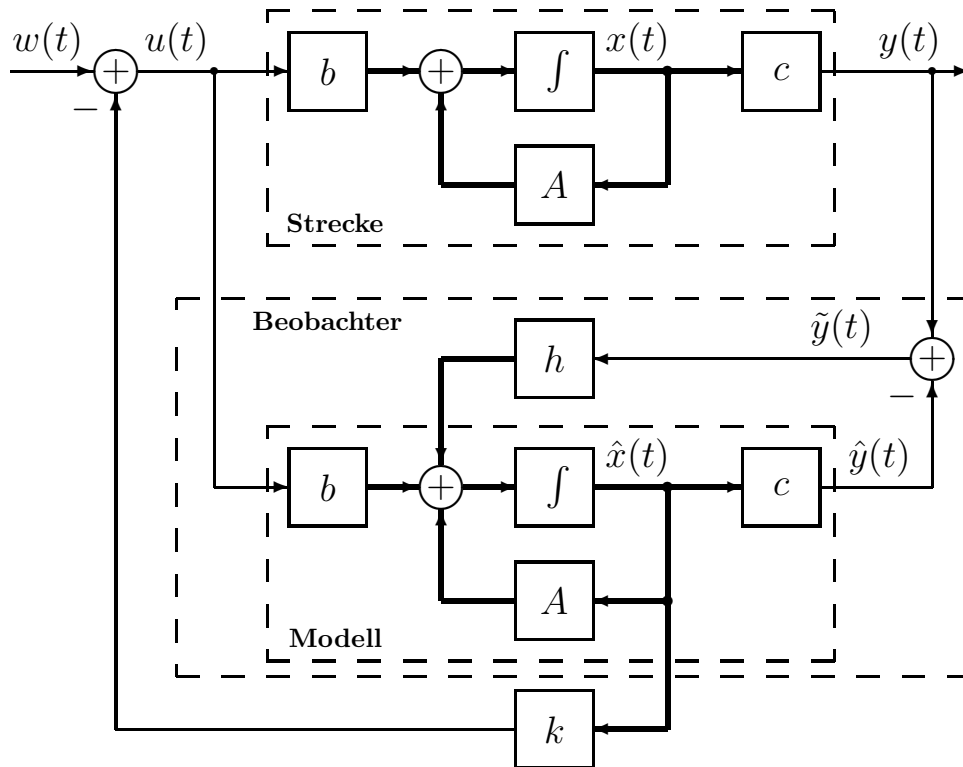


Abbildung 4.4: Beobachter-geregeltes System

→ Gleichung (3.13)

läßt sich der Vektor \mathbf{h} (analog zum Vektor \mathbf{k} beim Reglerentwurf durch Polvorgabe in der Regler-Normalform) wieder besonders einfach berechnen:

$$\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{I}}(\boldsymbol{\alpha}_B - \mathbf{a})^T. \quad (4.9)$$

Beispiel 9 Für den zu balancierenden Stab (1.18), mit $g/l = 9$,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= (1 \ 0) \mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

sei ein Beobachter zu entwerfen, dessen Pole bei $s_{1,2} = -4 \pm 4j$ liegen.

Das charakteristische Polynom der Strecke ist

$$a(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2 - 9,$$

also $\mathbf{a} = (0 \ -9)$, das gewünschte charakteristische Polynom des Beobachters ist

$$\alpha_B(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T| = (s + 4)^2 + 4^2 = s^2 + 8s + 32,$$

also $\boldsymbol{\alpha}_B = (8 \ 32)$. Die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} ist

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und die Matrix \mathcal{T}

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Werten berechnet man

$$h_1 = \alpha_1 - a_1 = 8$$

und

$$h_2 = \alpha_0 - a_0 = 41.$$

→ Abschnitt 1.2.2 **Übung 23** Formen Sie die Zustandsdarstellung des Beispiels 9 in die Beobachter-Normalform um und berechnen Sie nun \mathbf{h} mit Hilfe der Beziehung (4.9).

→ Abschnitt 3.1.2.1.2 **Übung 24** Berechnen Sie das \mathbf{h} des Beispiels 9 mit Hilfe der Formel von Ackermann.

4.2 Schätzfehler

Die Dynamik des Schätzfehlers $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ ist durch die homogene Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (4.11)$$

bestimmt, das bedeutet, wenn die Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T$ stabil ist, geht der Schätzfehler asymptotisch (exponentiell) gegen Null. Die Geschwindigkeit der Fehlerreduktion kann wiederum durch geeignete Wahl des Vektors \mathbf{h} beeinflusst werden.

Die Fehlerdifferentialgleichung bleibt homogen aber wird komplexer, wenn das Streckenmodell nicht exakt ist. Wenn allerdings Störungen $z(t)$ und Meßfehler $v(t)$ auf das System wirken

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{b}_z z(t), \quad (4.12a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + v(t), \quad (4.12b)$$

dann verschwindet der Schätzfehler nicht:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}_z z(t) - \mathbf{h}v(t). \quad (4.13)$$

Übung 25 Verifizieren Sie die Differentialgleichungen (4.11) und (4.13) des Schätzfehlers.

4.3 Separationsprinzip

Die Parameter \mathbf{k} und, bei Einführung eines Beobachters, \mathbf{h} der bisher betrachteten Reglerstruktur

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t),$$

oder, wenn der gesamte Zustandsvektor \mathbf{x} nicht verfügbar ist,

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}}(t),$$

→ Abschnitt 3.1.2.1 und 4.1.2 werden getrennt berechnet (Polvorgabe oder linear-quadratischer Entwurf). Ist dieses Vorgehen korrekt, oder beeinflusst der eine Entwurf den anderen nicht rückwirkend? Diese Frage des unabhängigen Regler- und Beobachter-Entwurfs wird im folgenden durch das Separationsprinzip beantwortet.

4.3.1 Strecken- und Beobachtergleichung

Die Differentialgleichung der durch Rückführung der geschätzten Zustände geregelten Strecke ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}}(t),$$

die durch Einführung des Schätzfehlers $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ umgeschrieben werden kann als

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)).$$

Wird diese Differentialgleichung mit der des Schätzfehlers (4.11) kombiniert, dann erhält man folgendes System

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

dessen charakteristische Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T & -\mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{vmatrix} = 0.$$

Separationsprinzip Da die Determinante einer Block-Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Determinanten der Diagonallöcke ist [25, S. 650], erhält man mit

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T| |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T| = 0 = \alpha(s)\alpha_B(s)$$

das Separationsprinzip, welches zeigt, daß

- die Pole des beobachter-geregelten Systems aus den „Regler-Polen“ und den „Beobachter-Polen“ zusammengesetzt sind, und daß
- beide „Polgruppen“ getrennt und unabhängig voneinander plziert werden können.

Übung 26 *Das Separationsprinzip ist hier aus dem Differentialgleichungssystem Strecke-Schätzfehler entwickelt worden. Es kann auch aus dem Differentialgleichungssystem Strecke-Beobachter entwickelt werden. Die Determinante der charakteristischen Gleichung ist dann aber nicht von vorneherein in Block-Dreiecksform, sondern sie muß durch elementare Zeilen- und Spaltentransformationen dahin transformiert werden.*

Bilden Sie die Determinante und führen Sie die Transformationen durch (Addition oder Subtraktion von Linearkombinationen anderer Spalten oder Zeilen von einer Spalte oder Zeile) [14, Seite 514], [25, Seite 271].

4.3.2 Gesamtübertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion vom Referenz-Eingang¹ $w(t)$ zum System-Ausgang $y(t)$ erhält man durch Laplace-Transformation der um den Referenzeingang erweiterten Differentialgleichung (4.14)

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} w(t),$$
$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t).$$

¹ Von Null unterschiedliche Referenzeingänge $w(t)$ sind in Abschnitt 3.2 eingeführt worden.

Diese ist

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{X}(s) = \mathbf{b}\mathbf{k}^T\tilde{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{b}W(s), \quad (4.15a)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T)\tilde{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{0}, \quad (4.15b)$$

$$Y(s) = \mathbf{c}^T\mathbf{X}(s). \quad (4.15c)$$

Die zweite dieser Beziehungen (4.15b) muß für alle s erfüllt sein, das bedeutet, daß $\tilde{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{0}$ gelten muß. Diese Bedingung wird in (4.15a) eingesetzt und ergibt mit (4.15c)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1}\mathbf{b}.$$

Diese Übertragungsfunktion ist die gleiche wie die für das geregelte System mit dem perfekten Beobachter $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t)$, d.h. die Dynamik des Beobachters beeinflusst die Übertragungsfunktion nicht.

4.4 Beobachter-Entwurf

Die bisherigen Betrachtungen zum Prinzip der Zustandsschätzung sollen an einem konkreten Beispiel zusammengefaßt werden. Wieder soll der zu balancierende Stab zur Anschauung dienen. Das Zustandstripel $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei durch einen Zustandsregler geregelt; es seien die geschätzten Zustandsvariablen zurückgeführt. Regler- und Beobacherverstärkungen können nach dem Separationsprinzip getrennt berechnet werden. Hier sei für beide Fälle Polvorgabe gewählt werden.

4.4.1 Reglerverstärkung

Die Pole des geregelten Systems sollen bei $s_{1,2} = -1 \pm j$ liegen. Die dafür notwendigen Verstärkungsfaktoren sind schon in Beispiel 4 als $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -11 & -2 \end{pmatrix}$ berechnet worden.

4.4.2 Beobacherverstärkung

Die Pole des Beobachter-Systems sollen bei $s_{1,2} = -2 \pm 2j$ liegen. Im realen Entwurf werden die Beobachterpole etwa um den Faktor drei bis fünf weiter nach links verschoben als die Reglerpole (s.a. Beispiel 9). Hier wird der Faktor zwei gewählt, um das Abklingen des Schätzfehlers besonders deutlich werden zu lassen. Besitzern eines PC sei an dieser Stelle das Experimentieren mit den Beobachterpolen empfohlen. MATLAB [33] ist für solche Experimente die geeignetste Softwareumgebung. Analog Beispiel 9 werden die Beobacherverstärkungen zu $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 4 & 17 \end{pmatrix}$ ermittelt.

4.4.3 Systemsimulation

Zunächst sei das Differentialgleichungssystem Strecke-Beobachter allgemein formuliert (s.a. Übung 26)

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{h}\mathbf{c}^T & \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_0 \end{pmatrix},$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}.$$

Das System befinde sich vor dem Zeitpunkt t_0 in einem stationären Zustand $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ und werde zum Zeitpunkt t_0 in seinem Zustand gestört: $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Aufgabe des Reglers ist es, den Zustand wieder in die gewünschte Lage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zurückzuführen. Der Beobachter hat keine Kenntnis von \mathbf{x}_0 . Wäre dieser Wert bekannt, dann könnte er auch als Anfangswert des Beobachterzustandes gewählt werden. In diesem Fall wäre der Beobachter kein asymptotischer sondern ein exakter. Der Anfangswert des Beobachterzustandes wird in der Regel als Null angenommen.

Die Simulation des Systems für $\mathbf{x}_0 = (1 \ 0)$ und $\hat{\mathbf{x}}_0 = (0 \ 0)$ ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Gut zu erkennen ist, daß der Schätzfehler nach der Hälfte der Einregelzeit des Systems abgeklungen ist. Dies ist aufgrund der Wahl der Beobachterpole plausibel.

Abbildung 4.5: Simulation des Systems Regler-Beobachter

In Abbildung 4.6 ist das System mit vollständiger Zustandsrückführung dargestellt. Beide Zustände werden hier gemessen. Die Verbesserung gegenüber dem System mit Rückführung der Beobachterzustände ist deutlich zu erkennen. Man zahlt einen Preis für die Zustandsschätzung, d.h. das Einsparen von Sensoren.

4.5 Reduzierter Beobachter

In aller Regel ist der Aufwand, alle Zustände zu schätzen zu groß. Einige Zustände sind meistens unter den gemessenen Werten, und ein gemessener Wert ist fast immer genauer als ein durch ein Modell approximierter. Man kann einen Beobachter reduzierter Ordnung (oder reduzierten Beobachter) entwerfen, der die Ordnung $n - p$ besitzt, wobei n die Dimension des Zustandsvektors und p die des Meßvektors ist. Wir beschränken uns auf $p = 1$, so daß der reduzierte Beobachter in unserem Fall nur für kleine n einen merklichen Gewinn bringt.

Abbildung 4.6: Simulation des Systems mit Zustandsrückführung

4.5.1 Struktur

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Elemente des Zustandsvektors so umordnen, daß die gemessene Größe mit der ersten Komponente übereinstimmt:²

$$y(t) = x_M(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \mathbf{x}(t).$$

Dann kann man die Zustandsdarstellung in einen gemessenen, mit Index M , und einen zu beobachtenden Teil, mit Index B trennen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_M(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_B(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{MM} & \mathbf{A}_{MB} \\ \mathbf{A}_{BM} & \mathbf{A}_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_M(t) \\ \mathbf{x}_B(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_M(t) \\ \mathbf{b}_B(t) \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= (c_M \ \mathbf{c}_B^T) \begin{pmatrix} x_M(t) \\ \mathbf{x}_B(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Eingang $u(t)$ und der gemessene Ausgang $x_M(t)$ sind bekannt, $\mathbf{x}_B(t)$ ist zu schätzen. Der reduzierte Beobachter wird nun aus einer Analogiebetrachtung zum vollständigen Beobachter erhalten. Die Zustandsgleichungen des vollen Systems sind

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),$$

die des reduzierten Systems

$$\dot{\mathbf{x}}_B(t) = \mathbf{A}_{BB}\mathbf{x}_B(t) + \mathbf{A}_{BM}x_M(t) + \mathbf{b}_B u(t),$$

mit den beiden letzten Summanden als Eingangsgrößen. Die Meßgleichung des vollen Systems ist

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t),$$

die des reduzierten Systems

$$\dot{x}_M(t) - a_{MM}x_M(t) - b_M u(t) = \mathbf{A}_{MB}\mathbf{x}_B(t).$$

Die beiden letzten Gleichungspaare sind äquivalent, wenn die folgenden Substitutionen erfolgen:

$$\mathbf{x}(t) \leftarrow \mathbf{x}_B(t),$$

² Besteht $y(t)$ aus einer Linearkombination von mehreren Zustandsvariablen, dann kann man einen sogenannten Kontrollbeobachter entwerfen [20]. Diese Möglichkeit geht über den Rahmen unseres Stoffes hinaus.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &\leftarrow \mathbf{A}_{BB}, \\
\mathbf{B}u(t) &\leftarrow \mathbf{A}_{BM}x_M(t) + \mathbf{b}_B u(t), \\
y(t) &\leftarrow \dot{x}_M(t) - a_{MM}x_M(t) - \mathbf{b}_M u(t), \\
\mathbf{c} &\leftarrow \mathbf{A}_{MB}.
\end{aligned}$$

Diese Substitutionen werden in die Gleichung (4.6) des vollen Beobachters

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{h}y(t),$$

eingesetzt und ergeben die Gleichung des reduzierten Beobachters:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}}_B(t) &= (\mathbf{A}_{BB} - \mathbf{h}_B \mathbf{A}_{MB})\hat{\mathbf{x}}_B(t) + \mathbf{A}_{BM}y(t) + \mathbf{b}_B u(t) + \mathbf{h}_B[\dot{y}(t) - a_{MM}y(t) - b_M u(t)] \\
&= (\mathbf{A}_{BB} - \mathbf{h}_B \mathbf{A}_{MB})\hat{\mathbf{x}}_B(t) + (\mathbf{A}_{BM} - \mathbf{h}_B a_{MM})y(t) + (\mathbf{b}_B - \mathbf{h}_B b_M)u(t) + \mathbf{h}_B \dot{y}(t).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

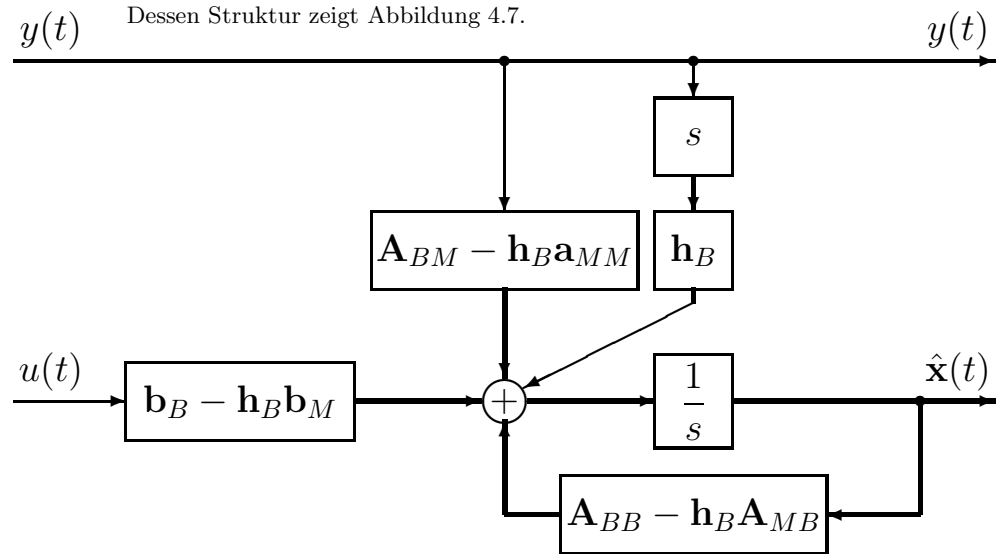


Abbildung 4.7: Struktur des reduzierten Beobachters

4.5.2 Eigenschaften

Der reduzierte Beobachter hat analog zum vollen Beobachter folgende Eigenschaften.

- 1) Der Vektor \mathbf{h}_B ist der Verstärkungsvektor in der Rückführung des reduzierten Beobachters. Er kann wieder durch Polvorgabe bestimmt werden.
- 2) Auch für den reduzierten Beobachter gilt das Separationsprinzip.
- 3) Die Differentialgleichung des Schätzfehlers $\tilde{\mathbf{x}}_B(t) = \mathbf{x}_B(t) - \hat{\mathbf{x}}_B(t)$ lautet

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_B(t) = (\mathbf{A}_{BB} - \mathbf{h}_B \mathbf{A}_{MB})\tilde{\mathbf{x}}_B(t).$$

Er geht für stabiles $\mathbf{A}_{BB} - \mathbf{h}_B \mathbf{A}_{MB}$ asymptotisch (exponentiell) gegen Null.

- 4) Die charakteristische Gleichung des Schätzfehler ist somit

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{BB} + \mathbf{h}_B \mathbf{A}_{MB}| = 0.$$

5) Zur Wahl der Verstärkungsmatrix nach dem Verfahren der Polvorgabe wird die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O}_B benötigt; diese ist für den reduzierten Beobachter

$$\mathcal{O}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{MB} \\ \mathbf{A}_{MB}\mathbf{A}_{BB} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{MB}\mathbf{A}_{BB}^{n-1-p} \end{pmatrix},$$

wobei hier nur der Fall $p = 1$ betrachtet wird. Ihr Aufbau folgt wiederum aus den oben angegebenen Substitutionen.

4.5.3 Implementierung

In der Form der Gleichung (4.16) kann der reduzierte Beobachter nicht implementiert werden, da die Meßgröße $y(t)$ differenziert werden müßte, wodurch Meßstörungen (Meßrauschen) verstärkt würden. Abhilfe schafft formale Einführung einer Variablentransformation

$$\bar{\mathbf{x}}_B = \hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{h}_B y,$$

die, in Gleichung (4.16) eingeführt, folgende Implementierung ergibt

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_B(t) = (\mathbf{A}_{BB} - \mathbf{h}_B \mathbf{A}_{MB})\bar{\mathbf{x}}_B(t) + (\mathbf{A}_{BM} - \mathbf{h}_B \mathbf{a}_{MM} + \mathbf{A}_{BB}\mathbf{h}_B - \mathbf{h}_B \mathbf{A}_{MB}\mathbf{h}_B)y(t) + (\mathbf{b}_B - \mathbf{h}_B \mathbf{b}_M)u(t).$$

Diese ist im Blockschaltbild der Abbildung 4.8 dargestellt. Die Variablentransformation bedingt eine Verschiebung des Blockes \mathbf{h}_B vom Eingang des Integrators hinter dessen Ausgang. Der geschätzte Zustand wird dann aus der Beziehung

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \bar{\mathbf{x}}_B + \mathbf{h}_B y$$

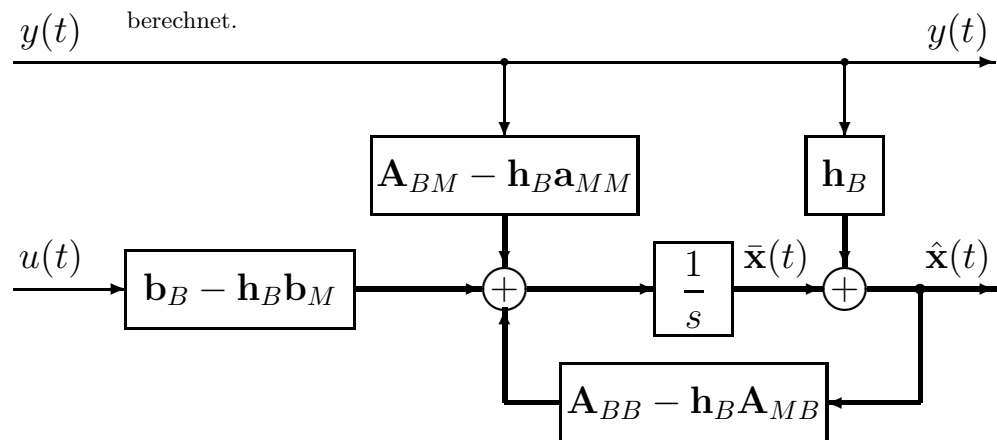


Abbildung 4.8: Implementierung des reduzierten Beobachters

4.5.4 Regelung mit reduziertem Beobachter

Die Implementierung des Regelgesetzes

$$u(t) = - \begin{pmatrix} k_M & \mathbf{k}_B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_M(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_B(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_M & \mathbf{k}_B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_M(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_B(t) + \mathbf{h}_B y(t) \end{pmatrix}$$

mit dem reduzierten Beobachter führt auf das folgende dynamische System

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_B(t) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_B(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \bar{\mathbf{x}}_B(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Die Beobachteranfangswerte $\bar{\mathbf{x}}_B(t_0)$ werden aus Unkenntnis ihrer wahren Werte meist Null gesetzt. Die Dynamikmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ hat folgende Block-Struktur:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \left(\begin{pmatrix} b_M \\ \mathbf{b}_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_M & \mathbf{k}_B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_B c_M \end{pmatrix} \right) & \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{A}_{BM} - \mathbf{h}_B \mathbf{a}_{MM} + \mathbf{A}_{BB} \mathbf{h}_B - \mathbf{h}_B \mathbf{A}_{MB} \mathbf{h}_B \right) c_M - (\mathbf{b}_B - \mathbf{h}_B b_M) \begin{pmatrix} k_M & \mathbf{k}_B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_B c_M \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots \\ \dots & - \left(\begin{pmatrix} b_M \\ \mathbf{b}_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_M & \mathbf{k}_B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right) \\ \dots & \mathbf{A}_{BB} - \mathbf{h}_B \mathbf{A}_{MB} - (\mathbf{b}_B - \mathbf{h}_B b_M) \begin{pmatrix} k_M & \mathbf{k}_B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Übung 27 Vergewissern Sie sich bitte, ob die Dynamikmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ korrekt formuliert ist und schreiben Sie sich die $\bar{\mathbf{A}}_{ij}$ getrennt auf.

Beispiel 10 Abschließend werde für das Beispiel in Abschnitt 4.4 ein reduzierter Beobachter entworfen. Gemessen werde die erste Zustandsgröße: $y(t) = x_1(t)$, geschätzt werde die zweite Zustandsgröße: $x_B(t) = x_2(t)$.

Die Pole des geregelten Systems sollen wieder bei $s_{1,2} = -1 \pm j$ liegen mit den entsprechenden Verstärkungsfaktoren $\begin{pmatrix} k_M & k_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -2 \end{pmatrix}$. Der Beobachterpol liege bei $s = -2$. Diese Polvorgabe wird durch $h_B = 2$ erreicht.

Abbildung 4.9: Simulation des Systems mit reduziertem Beobachter

Die Simulation des Gesamtsystems (4.17) für $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\bar{x}_2 = 0$ ist in Abbildung 4.9 gezeigt.

4.6 Erweiterungen

Auch im Falle der Rückführung geschätzter Zustandsgrößen kann die Zustandsvektorrückführung auf folgende Fälle erweitert werden:

- Führungsverhalten,
- Integral-Regelung,
- Störgrößenbeobachtung.

Die Wahl geeigneter Reglerstrukturen ist in diesen Fällen allerdings etwas komplexer; ihre Behandlung geht über diesen einführenden Text hinaus. Der interessierte Leser findet Material dazu in den Referenzen [15, 16].

Literaturverzeichnis

- [1] Ackermann, J.: *Abtastregelung*. Volume I: Analyse und Synthese, Springer, Berlin, 1983.
- [2] Ackermann, J.: *Abtastregelung*. Volume II: Entwurf robuster Systeme, Springer, Berlin, 1983.
- [3] Anderson, B.D.O., J.B. Moore: *Optimal Control: Linear-Quadratic Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [4] Anderson, B.D.O., J.B. Moore: *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1979.
- [5] Åström, K.J., B. Wittenmark: *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [6] Bartels, R.H., G.W. Stewart: A solution of the equation $AX+XB=C$. *Comm. ACM* **15** (1972) 820–826.
- [7] Bode, H.W.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, New York, 1945.
- [8] Bryson, A.E., Y.C. Ho: *Applied Optimal Control*. Ginn, Waltham, Ma, 1969.
- [9] Chen, C.-T.: *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehardt and Winston, New York, 1984.
- [10] Conte, S.D., C. de Boor: *Elementary Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [11] Dörrscheidt, F., W. Latzel: *Grundlagen der Regelungstechnik*. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [12] Dongarra, J.J., C.B. Moler, J.R. Bunch, G.W. Stewart: *Linpack User's Guide*. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [13] Evans, W.R.: Graphical analysis of control systems. *Trans. AIEE* **67** (1948) 547–551.
- [14] Föllinger, O.: *Regelungstechnik*. Hüthig, Heidelberg. 61990.
- [15] Franklin, G.F., J.D. Powell, M.L. Workman: *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, Reading, 1990.
- [16] Franklin, G.F., J.D. Powell, A. Emami-Naeini: *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, Reading, 1986.
- [17] Freund, E.: *Regelungssysteme im Zustandsraum*. Volume I: Struktur und Analyse, Oldenbourg, München, 1987.
- [18] Freund, E.: *Regelungssysteme im Zustandsraum*. Volume II: Synthese, Oldenbourg, München, 1987.
- [19] Golub, G.H., C.F. van Loan: *Matrix Computation*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1983.
- [20] Grübel, G.: Beobachter zur Reglersynthese. Schriftenreihe des Lehrstuhls für Meß- und Regelungstechnik der Ruhr-Universität Bochum, Heft 9, 1977.
- [21] Grübel, G.: Die regelungstechnische Programmbibliothek RASP. *Regelungstechnik*, 31:248–256, 1983.
- [22] Hairer E., S.P. Nørsett, G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations I — Nonstiff Problems*. Springer, Berlin, 1987.
- [23] Hippe, P., C. Wurmthaler: *Zustandsregelung*. Springer, Berlin, 1985.

- [24] Kahaner, D., C. Moler, S. Nash: *Numerical Methods and Software*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [25] Kailath, T.: *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- [26] Kalman, R.E.: On the general theory of control systems. Proc. First Int. Congr. Automatic Control. Moskau, 1960.
- [27] Kraft, D: *Kompendium der Steuerungs- und Regelungstechnik*. Skriptum zur Vorlesung, FHM, München, 1994.
- [28] Kraft, D: TOMP — Fortran Modules for Optimal Control Calculations. ACM Trans. Math. Softw., Vol. 20, No. 3, pp. 262–281, 1994.
- [29] Kuo, B.C.: *Automatic Control Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, ⁵1987.
- [30] Kwakernaak, H., R. Sivan: *Linear Optimal Control Systems*. Wiley, New York, 1972.
- [31] Landgraf, C., G. Schneider: *Elemente der Regelungstechnik*. Springer, Berlin, 1970.
- [32] Laub, A.J.: A Schur method for solving algebraic Riccati equations. IEEE Trans.Auto.Contr. **AC-24** (1979) 913–921.
- [33] Little, J., C.B. Moler: *Matlab User's Guide*. The MathWorks, South Natick, 1989.
- [34] Ludyk, G.: *CAE von dynamischen Systemen*. Springer, Berlin, 1990.
- [35] Moler, C.B., C.F. van Loan: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. SIAM Review **20** (1978) 801–836.
- [36] Nyquist, H.: *Regeneration Theory*. Bell Systems Tech. J. **11** (1932) 126–147.
- [37] Phillips, C.L., H.T. Nagel, Jr.: *Digital Control System Analysis and Design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984.
- [38] Rao, S.S.: *Mechanical Vibrations*. Addison-Wesley, Reading, ³1995.
- [39] Stoer, J., R. Bulirsch: *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, Berlin, 1980.
- [40] Vidyasagar, M.: *Control System Synthesis — A Factorization Approach*. MIT Press, Cambridge, 1985.
- [41] Wiener, N.: *The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. Wiley, New York, 1949.

Anhang A Matrix-Algebra

Definition: Eine $m \times n$ Matrix ist eine rechteckige Anordnungen von (ganzen, reellen, komplexen, etc.) Zahlen oder Funktionen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit m Zeilen und n Spalten. Die einzelnen Zahlen sind die Komponenten, Elemente oder Eingänge der Matrix, das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte wird mit a_{ij} bezeichnet. Gilt $m = n$, dann heißt die Matrix quadratisch. Das Dupel (m, n) wird Dimension der Matrix genannt.

Vektoren: Matrizen mit einer Spalte oder einer Zeile heißen Vektoren, genauer Spalten- bzw. Zeilenvektoren. Im allgemeinen werden Vektoren als Spaltenvektoren angegeben, Zeilenvektoren sind transponierte Spaltenvektoren: \mathbf{a} ist ein Spaltenvektor, \mathbf{a}^T ist derselbe Vektor zum Zeilenvektor transponiert. Vektoren sind in aller Regel als Spaltenvektoren notiert; alle Ausnahmen davon sind ausdrücklich erwähnt. Die ganze Zahl n der Elemente des Vektors heißt Dimension des Vektors.



Konventionen: Matrizen werden hier und im folgenden in Großbuchstaben und fett geschrieben, Vektoren in Kleinbuchstaben und ebenfalls fett. Komponenten oder Elemente von Vektoren werden normal gedruckt und mit einem Index versehen, z.B. x_i , Elemente von Matrizen werden ebenfalls normal gedruckt und mit zwei Indizes gekennzeichnet, z.B. a_{ij} , wobei der erste Index der Zeilenindex, der zweite der Spaltenindex ist.

Transponierung: Die Transponierte einer Matrix wird durch Vertauschen von Zeilen und Spalten der Matrix erzeugt. Sie wird durch ein hochgestelltes T nach der Matrix gekennzeichnet. Ein transponierter Spaltenvektor ist ein Zeilenvektor.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 8 & -6 & 17 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 4 \\ -2 & 17 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Spezielle Matrizen: Quadratische Matrizen, deren nicht-diagonale Elemente Null sind, heißen Diagonalmatrizen, Diagonalmatrizen, deren Diagonalelemente alle Eins sind, heißen Einheitsmatrizen. Die Einheitsmatrix wird \mathbf{I} geschrieben. Will man ihre Dimension n noch angeben, dann indiziert man die Matrix \mathbf{I}_n .

Addition: Matrizen oder Vektoren gleicher Dimension werden elementweise addiert oder subtrahiert.

Multiplikation mit einem Skalar: Matrizen oder Vektoren werden elementweise mit einer skalaren Größe multipliziert oder dividiert.

Skalarprodukt: Das Skalarprodukt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor gleicher Dimension ist die Summe der elementweisen Produkte der einzelnen Vektorelemente, d.h. explizit

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n.$$

Beispiel:

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 50.$$

Matrixprodukt: Das Produkt einer $m \times n$ Matrix \mathbf{A} mit einer $n \times p$ Matrix \mathbf{B} ist eine $m \times p$ Matrix \mathbf{C} , deren Elemente c_{ij} die Skalarprodukte der Zeilenvektoren \mathbf{a}_i , $i = 1, \dots, m$ der Matrix \mathbf{A} mit den Spaltenvektoren \mathbf{b}_j , $j = 1, \dots, p$ der Matrix \mathbf{B} sind:

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j.$$

Die Anzahl der Spalten von \mathbf{A} muß gleich der Anzahl der Zeilen von \mathbf{B} sein, sonst ist die Matrixmultiplikation nicht definiert.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 30 \\ 54 & 69 & 84 \end{pmatrix}$$

Es gilt folgendes:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$



Aber es gilt im allgemeinen nicht:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA},$$

d.h. die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.

Determinante: Die Determinante $|\mathbf{A}|$ einer Matrix wird auch als $\det(\mathbf{A})$ bezeichnet. Die zum Element a_{ij} definierte Unterdeterminante A_{ij} ist die Determinante der Matrix, die aus der Matrix \mathbf{A} entsteht, wenn deren i -te Zeile und j -te Spalte gestrichen werden.

Beispiel: Die Unterdeterminante A_{13} der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

ist

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Kofaktor: Der Kofaktor c_{ij} zum Element a_{ij} ist definiert als

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Beispiel: Die Matrix \mathbf{A} sei wie im vorangehenden Beispiel (A.1), ihr Kofaktor c_{13} ist

$$c_{13} = (-1)^4 A_{13} = -1.$$

Adjungierte Matrix: Die zur Matrix \mathbf{A} adjungierte Matrix $\text{Adj}(\mathbf{A})$ ist die Transponierte der Matrix der Kofaktoren:

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^T.$$

Beispiel: Die Matrix \mathbf{A} sei wieder wie im Beispiel (A.1), dann ist deren Adjungierte

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Inverse: Die Inverse \mathbf{A}^{-1} einer quadratischen Matrix ist, falls sie existiert, die Lösung der Matrixgleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}.$$

Damit gilt sofort:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$



Mit Hilfe der Cramerschen Regel kann \mathbf{A}^{-1} berechnet werden:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{Adj}(\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|}. \quad (\text{A.2})$$

Beispiel: Die Matrix \mathbf{A} sei wieder wie im Beispiel (A.1), dann ist deren Inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt außerdem folgendes:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

Übung 28 Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Welche Bedingung muß an die Koeffizienten a_{ij} gestellt werden, damit \mathbf{A} invertierbar ist?

Eigenwerte: Die Eigenwerte λ einer Matrix sind die Lösungen der Polynomgleichung

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0. \quad (\text{A.4})$$

Beispiel: Die Matrix \mathbf{A} sei wieder wie im Beispiel (A.1):

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda-3 \end{array} \right| =$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 2 = 0,$$

deren Lösungen sind

$$\lambda_1 = 3.7321, \quad \lambda_2 = 2.0000, \quad \lambda_3 = 0.2679.$$

Es gelten die Beziehungen

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{und} \quad \text{spur}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

wobei $\text{spur}(\mathbf{A})$, die Spur von \mathbf{A} , die Summe der Diagonalelemente der Matrix \mathbf{A} ist.

Übung 29 Verifizieren Sie diese Beziehungen für das gerade behandelte Beispiel.

Übung 30 Bilden Sie die Eigenwerte der Matrix aus Übung 28.

Rang einer Matrix: Die m -dimensionalen Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ heißen linear abhängig, wenn es Zahlen c_1, c_2, \dots, c_n gibt, die nicht alle Null sind und die Gleichung

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

erfüllen. Kann diese Gleichung nur durch $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$ erfüllt werden, dann sind die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ linear unabhängig.

Geometrische Deutung: Linear abhängige Vektoren in der Ebene liegen parallel, im Raum liegen sie in einer Ebene.

Beispiel: Die beiden Vektoren $\mathbf{a}^T = (1 \ 2 \ 3)$ und $\mathbf{b}^T = (2 \ 4 \ 6)$ sind linear abhängig, da

$$c_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch $c_1 = 2$ und $c_2 = -1$ erfüllt wird.

Dagegen sind die beiden Vektoren $\mathbf{a}^T = (1 \ 2 \ 3)$ und $\mathbf{b}^T = (2 \ 4 \ 7)$ linear unabhängig.

Übung 31 Überlegen Sie sich, warum der Nullvektor $(0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ von jedem Vektor \mathbf{a} linear abhängig ist.



Eine $m \times n$ -Matrix hat den vollen oder maximalen Rang $\min(m, n)$, wenn $\min(m, n)$ Spalten oder Zeilen in ihr linear unabhängig sind.

Beispiel: Die 3×2 -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

hat den Rang $\min(3, 2) = 2$, die 2×3 -Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

dagegen nur den Rang $1 \neq \min(3, 2)$.

Quadratische Matrizen \mathbf{A} , mit $\dim(\mathbf{A}) = n$, haben genau dann vollen Rang n , wenn ihre Determinante nicht verschwindet

$$|\mathbf{A}| \neq 0.$$

Übung 32 *Hat die Matrix*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

vollen Rang?

Anhang B Linearisierung

Regelungstechnische Analyse- und Syntheseverfahren sind am weitesten für lineare Systeme entwickelt. Dagegen sind fast alle physikalischen, technischen, ökonomischen und sozialen Prozesse nichtlinear und werden durch Differentialgleichungen folgender allgemeiner autonomer¹ Struktur beschrieben

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (\text{B.1})$$

Für die Untersuchung mit unseren Methoden muß diese Gleichung linearisiert werden.

Dazu wird eine nominale Lösung $\mathbf{x}^0(t)$ von (B.1) betrachtet, die durch den Eingang $\mathbf{u}^0(t)$ und eine gewisse Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0(t)$ erzeugt worden ist. Um diese nominale Lösung werde die i -te Komponente der Differentialgleichung (B.1) in eine Taylor-Reihe bis zum ersten Glied entwickelt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) &+ \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} (x_j - x_j^0) \\ &+ \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} (u_j - u_j^0), \\ &i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Nun seien

$$\Delta x_i = x_i - x_i^0$$

und

$$\Delta u_i = u_i - u_i^0,$$

und daher

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_i^0.$$

Es gilt

$$\dot{x}_i^0 = f_i(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0),$$

und damit kann Gleichung (B.2) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\Delta \dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \Delta x_j(t) + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \Delta u_j(t),$$

oder als Vektorgleichung für das gesamte System:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}. \quad (\text{B.2})$$

Dies ist die Standardform (1.12a) der Zustandsdarstellung dynamischer Systeme. Die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} beinhalten die partiellen Ableitungen der

¹ Ein System wird nicht-autonom genannt, wenn in den rechten Seiten der Differentialgleichungen die Zeit t explizit auftritt: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$.

Funktionen f_i nach den Zustandsvariablen x_j bzw. den Eingangsvariablen u_j in den Punkten \mathbf{x}^0 und \mathbf{u}^0 . Sie sind die Jacobi-Matrizen des Systems und werden wie folgt gebildet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3a})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3b})$$

Da die Taylor-Entwicklung nur in einer Umgebung von \mathbf{x}^0 und \mathbf{u}^0 gültig ist, müssen \mathbf{A} und \mathbf{B} für weiter von \mathbf{x}^0 und \mathbf{u}^0 entfernt liegende Punkte neu ermittelt werden; \mathbf{A} und \mathbf{B} sind dann nicht mehr konstant, sondern variieren mit der Zeit.

Beispiel 11 Gegeben sei die nichtlineare Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \dot{x} + \dot{x}x = u,$$

deren nichtlineare Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 =: f_1(\mathbf{x}, u), \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_2 - x_2 + u =: f_2(\mathbf{x}, u), \end{aligned}$$

lautet.

Die Jacobi-Matrizen werden als

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x_2 & -x_1 - 1 \end{pmatrix}_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnet, und mit $\mathbf{x}^0 = (x_1^0 \ x_2^0)^T$ als Nominallösung erhält man folgende lineare Zustandsgleichungen in den Variablen $\Delta \mathbf{x}$ und $\Delta \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2, \\ \Delta \dot{x}_2 &= -x_2^0 \Delta x_1 - (x_1^0 + 1) \Delta x_2 + \Delta u, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

und für $\mathbf{x}^0 = (x_1^0 \ x_2^0)^T = (1 \ 1)^T$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2, \\ \Delta \dot{x}_2 &= -\Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta u.\end{aligned}$$

Beachten Sie, daß die linearen Terme der nichtlinearen Darstellung unverändert in die lineare Darstellung übergehen. Dies ist plausibel, da die Linearisierung der linearen Darstellung an dieser nichts ändern soll.

Übung 33 Untersuchen Sie den Fehler in Beispiel 11, wenn die Linearisierung für

$$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2,$$

gültig sein soll.

Hinweis: Vergleichen Sie für extreme \mathbf{x} die lineare mit der nichtlinearen Zustandsdarstellung.

Beispiel 12 Betrachten sie folgendes lineare System

$$\dot{x}_1 = x_2 =: f_1(\mathbf{x}, u),$$

$$\dot{x}_2 = u =: f_2(\mathbf{x}, u).$$

Es werde folgendes nichtlineare Regelgesetz

$$u = (1 - e^{K|x_1|})\text{sign}(x_1),$$

mit der Vorzeichenfunktion

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} +1 & \text{if } z > 0 \\ -1 & \text{if } z < 0 \end{cases},$$

angewendet. Damit ergibt sich folgende linearisierte Zustandsdarstellung

$$\Delta \dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2 = \Delta x_2,$$

$$\Delta \dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta x_1 = K e^{-K|x_1^0|} \Delta x_1,$$

oder in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix},$$

mit $a = K e^{-K|x_1^0|} = \text{const.}$ für konstantes x_1^0 .

Für $x_1^0 = 0$ ergibt sich $a = K$ und für sehr großes x_1^0 strebt $a \rightarrow 0$. Im ersten Fall ist $\Delta \dot{x}_2 = K \Delta x_1$, im zweiten bleibt Δx_2 praktisch konstant.

Übung 34 Gegeben sei das nichtlineare System

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{x_2^2},$$

$$\dot{x}_2 = u x_1.$$

a) Bilden sie die linearisierte Zustandsdarstellung zunächst allgemein für beliebiges x_1^0 , x_2^0 und u^0 .

b) Nun nehmen Sie $u^0(t) = 0$ und $x_1^0(t_0) = x_2^0(t_0) = 1$ an. Zeigen Sie, daß für diesen Eingang und mit diesen Anfangsbedingungen die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}x_1^0(t) &= 1 - t, \\x_2^0(t) &= 1,\end{aligned}$$

ist.

c) Bilden Sie für diese $\mathbf{x}^0(t)$ und $\mathbf{u}^0(t)$ die Jacobi-Matrizen. Hier tritt die Zeit explizit auf!

Index

- Ackermann, 34
- Ähnlichkeitstransformation, 34
- Ausgangsvektor-Rückführung, 26
- Automatisierungstechnik, iv
- autonome Systeme, 68

- Balancieren, 1
- Bass, 31
- Begleitmatrix, 10
- Beobachtbarkeit, 32
- Beobachtbarkeitsmatrix, 50
- Beobachter, 48
 - reduzierter, 55
- Beobachter-Dynamik, 48
- Beobachteranfangswerte, 59
- Beobachternormalform, 8, 11, 13, 50
- Beobachtervektor, 50
- Block-Dreiecksmatrix, 53

- charakteristisches Polynom, 3, 14

- Determinante, 34, 64
- Diagonalmatrix, 63
- Differentialgleichung, 2, 68
 - Entwicklung in Taylor-Reihe, 68
 - linear, 7, 18
 - nichtlinear, 1, 18, 69
 - Differentialgleichung
 - Stabilitätsproblem, 25
- Diskretisierung, 18
- Dualität, 12

- Eigenwert, 65
- Eingangsgröße, 2
- Eingrößenfall, 29
- Einheitsmatrix, 63
- Euler-Verfahren, 21

- Faltungsintegral, 17
- FORTRAN, 6
- Frobenius-Matrix, 10

- Genauigkeit, 26
- Gura, 31

- Halteglied, 18
- Hamiltonsche Funktion, 35

- Heun-Verfahren, 22

- Inverse, 65

- Jacobi-Matrix, 69

- Kirchhoff, 10
- Knoten-Regel, 10
- Kofaktor, 64
- Kostenfunktion
 - minimale, 37

- Lagrange-Multiplikatoren, 35
- Laplace-Transformation, 2, 14, 48, 53
 - inverse, 17
- linear abhängig, 66
- linear unabhängig, 66
- Lyapunov-Gleichung, 39

- MATLAB, 19, 54
- Matrix
 - adjungierte, 65
 - Beobachtbarkeitsmatrix, 32, 58
 - Diagonalmatrix, 63
 - Einheitsmatrix, 63
 - inverse Matrix, 65
 - Kofaktor, 64
 - Multiplikation, 64
 - Rang, 66
 - Spur, 66
 - Steuerbarkeitsmatrix, 31
 - transponierte Matrix, 63
- Matrix-Exponentialfunktion, 18
- Mehrgrößenfall, 29
- Mesrauschen, 58
- Modell, 48
- Modell-Folge-Problem, 42

- Normalform, 8

- P-Regler, 4
- Parameterempfindlichkeit, 26
- PD-Regler, 4
- PID-Regler, 5
- Pol-Vorgabe, 5
- Polvorgabe, 23, 26
- Polynom

charakteristisches, 34, 38
 positiv definit, 37
 Prozes, 48

 Rang, 66
 Realisierung, 30
 Referenzeingang, 53
 Regelgesetz, 28
 Regelgröße, 2
 Regelkreis, 6
 Regler-Matrix, 26
 Reglernormalform, 8, 10, 13, 23, 26, 34, 37
 Regulatorproblem, 42
 Rekonstruktion, 47
 Rest-Glied, 21
 Riccati-Gleichung, 37
 Routh-Schema, 5
 Runge-Kutta-Verfahren, 22

 Schrittweitensteuerung, 22, 25
 Separationsprinzip, 52, 57
 Servoproblem, 42
 Simulation, 23
 analog, 6
 digital, 6
 Skalarprodukt, 64
 Softwareumgebung, 54
 Spline-Interpolation, 24
 stabilisierter Stab, 38
 Stabilität, 26
 Stellamplitude, 39
 Steuerbarkeit, 47
 modale, 32
 Steuerbarkeitsmatrix, 31
 Steuergesetz, 28
 Störgrößenbeobachtung, 60
 Störunterdrückung, 26
 Systemtyp, 42

 Taylor-Entwicklung, 18, 20, 21
 Transformationsmatrix, 13
 Transitionsmatrix, 17

 Übergangsfunktion, 38
 Übertragungsfunktion, 13
 Unterdeterminante, 64

 Variation, 35
 Vorfilter, 42
 Vorzeichenfunktion, 70

 zeitvariante Systeme, 69
 Zielfunktion, 34, 35

Zustandsdarstellung, 7
 Zustandsgleichung
 homogene Lösung, 15
 Lösung
 Frequenzbereich, 14
 partikuläre Lösung, 16
 Zustandsregler, 23, 28
 Zustandsvektor-Rückführung, 26